RESTRICCION LATERAL DEL SUELO EN PILAS DE FUNDACION

Rafael GONZALEZ*
Pedro ORTIGOSA**

RESUMEN

Se analiza el problema de interacción suelo estructura en pilas o muros de fundación rígidos sometidos a una solicitación vertical, un momento y un esfuerzo cortante aplicados en sus cabezas. El análisis incluye la interacción a nivel de sello de fundación y la existente en las caras laterales de la pila, para cuyo efecto las, características de deformación del suelo se asimilan a las de un medio elástico. Como resultado del análisis se establecen expresiones simplificadas que permiten determinar los desplazamientos de la pila y las presiones de interacción, laterales y a nivel de sello de fundación, en función de la geometría de la pila y de las características de deformación del suelo.

INTRODUCCION

Las pilas, al igual que los pilotes y las cimentaciones superficiales, constituyen un sistema alternativo de fundación que permite transmitir cargas a través de un estrato de suelo de baja capacidad soportante, a un estrato más profundo con mejores condiciones de soporte. En comparación con los pilotes, las pilas de fundación presentan normalmente razones longitud-ancho mucho menores, con lo cual, si se encuentran sometidas a solicitaciones horizontales y de

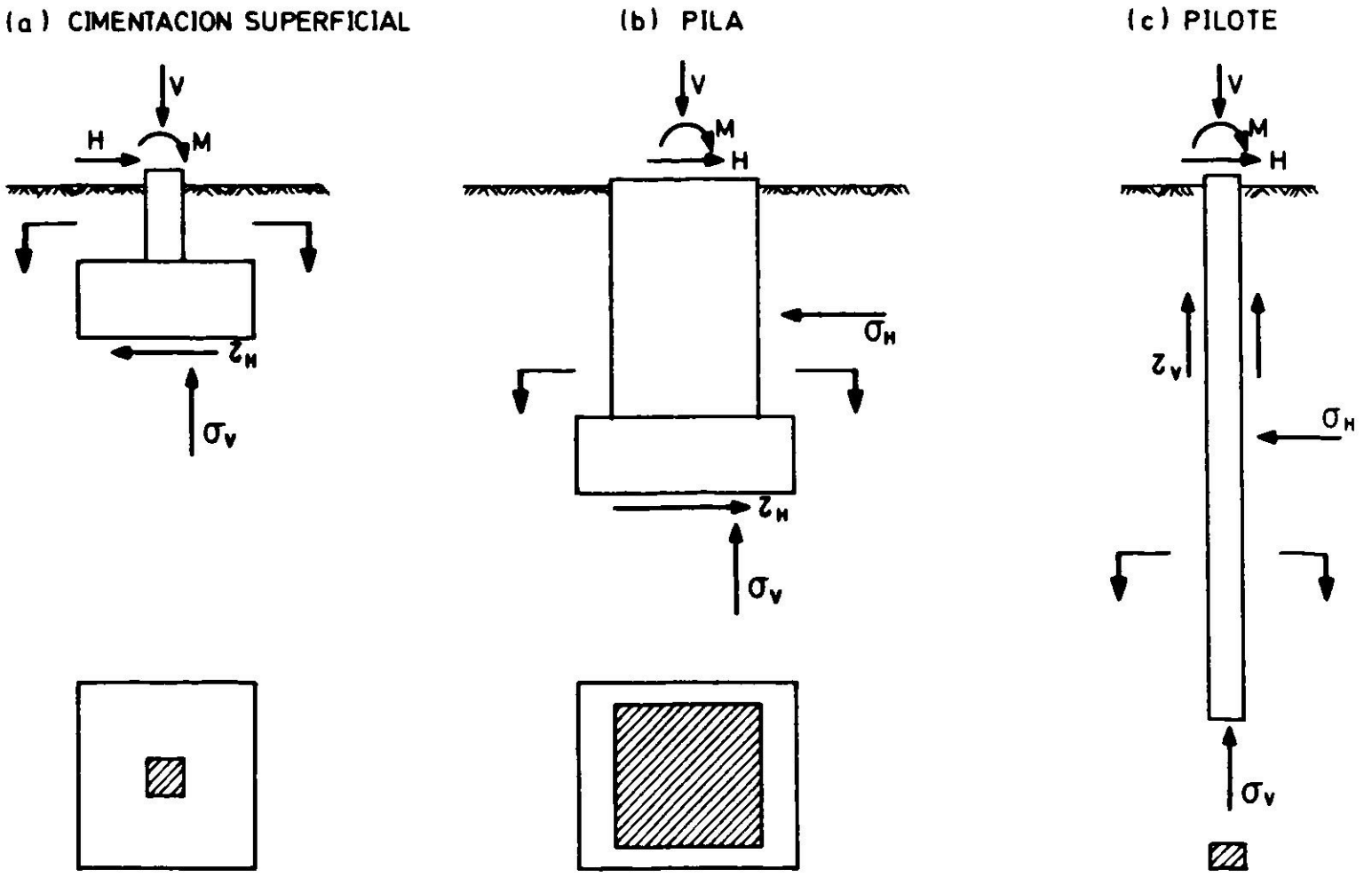
---

* Ingeniero del SERVIU Metropolitano.

** Profesor de Mecánica de Suelos y Fundaciones, Universidad, de Chile, Ingeniero Investigador del IDIEM, Universidad de Chile.

momento aplicadas en sus cabezas, es importante tener en cuenta no sólo la restricción lateral del suelo que las confina, sino, además, la restricción existente en su base. Por el contrario, para solicitaciones verticales, el análisis sobre el comportamiento de pilas sólo incluye la capacidad soportante del suelo bajo su base despreciándose el efecto de roce o adherencia en sus caras laterales. En los pilotes este último efecto puede resultar muy importante debido a que la razón longitud-ancho para este tipo de fundación alcanza valores elevados.

Para cimentaciones superficiales clásicas el efecto de la restricción lateral del suelo comúnmente se desprecia, concentrándose el análisis exclusivamente en el comportamiento de la base de la zapata. La Fig. 1 ilustra esquemáticamente los aspectos básicos establecidos en los párrafos precedentes.



Caso (a) La interacción suelo estructura se desarrolla solamente en la base de la zapata.

Caso (b) La interacción suelo estructura se desarrolla en las caras laterales y en la base de la pila; normalmente se ignora el roce o adherencia en las caras verticales.

Caso (c) La interacción suelo estructura debido a M y H se materializa a través de la restricción lateral σ_H; para la solicitación vertical la interacción se materializa por el roce o adherencia τ_V a lo largo del fuste y por la restricción en la punta σ_V.

Fig. 1. Esquema ilustrativo de la interacción suelo estructura para tres tipos clásicos de fundaciones.

Getzler[1] establece que la restricción del suelo en postes de alta tensión, torres, fundaciones de cepas o estribos de puentes y otras estructuras similares tipo cantilever, fijas a bloques de fundación prismáticos, presenta un interesante cuadro de fuerzas y momentos que actúan sobre las caras verticales del bloque.

Para Douglas y Davis[2] los movimientos producidos por este cuadro de fuerzas, rotación y desplazamientos horizontales, pueden ser particularmente importantes en estructuras estáticamente indeterminadas. Otros ingenieros e investigadores también se han preocupado del problema[3 a 12], pero la metodología planteada muchas veces resulta de difícil aplicación a la práctica, ya sea porque no se incorpora la restricción en la base de la pila, ya sea porque la restricción lateral del suelo se modela con resortes cuyo valor se basa en el discutido concepto de la constante de balasto, o simplemente porque el manejo de las ecuaciones resultantes es engorroso.

La finalidad del presente trabajo es presentar una metodología de cálculo simplificada para el análisis de pilas de fundación, teniendo en cuenta la restricción lateral del suelo confinante y la correspondiente al suelo existente bajo la base de la pila. Esta metodología, a diferencia de las planteadas en base a criterios de plastificación del suelo confinante[9], utiliza ecuaciones de compatibilidad de deformaciones modelando el suelo como un medio elástico. Posteriormente determina el nivel de las presiones de interacción para dictaminar cuán lejos se está de la falla y para poder establecer así el rango de validez de los resultados, o simplemente corregirlos mediante un proceso iterativo de modificación del módulo de deformación con cargo al comportamiento no lineal del suelo. Cabe señalar que los resultados que se obtienen para las presiones de interacción son poco sensibles al error que se cometa en la estimación del módulo de deformación del suelo. No ocurre lo mismo en lo referente a desplazamientos de la pila, los que son directamente proporcionales al valor que se adopte para dicho módulo, hecho que debe ser tomado en cuenta en problemas en los que la determinación de giros o corrimientos laterales tengan especial relevancia.

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

En la Fig. 2 se ilustra una pila de sección B_1 x L_1 con una base ensanchada de sección B_2 x L_2, sometida en su cabeza a la acción de una carga vertical V, un momento M y un esfuerzo cortante H^*. Considerando que la pila es infinitamente rígida su desplazamiento se representa por un giro θ en torno al centro de rotación CR, el que se ubica a una profundidad Z_R y en la vertical que dimidia el diagrama de presiones a nivel del sello de fundación**. Como producto del giro se generan presiones de interacción en las caras verticales de la pila, σ_{zd} y σ_{zi}, y

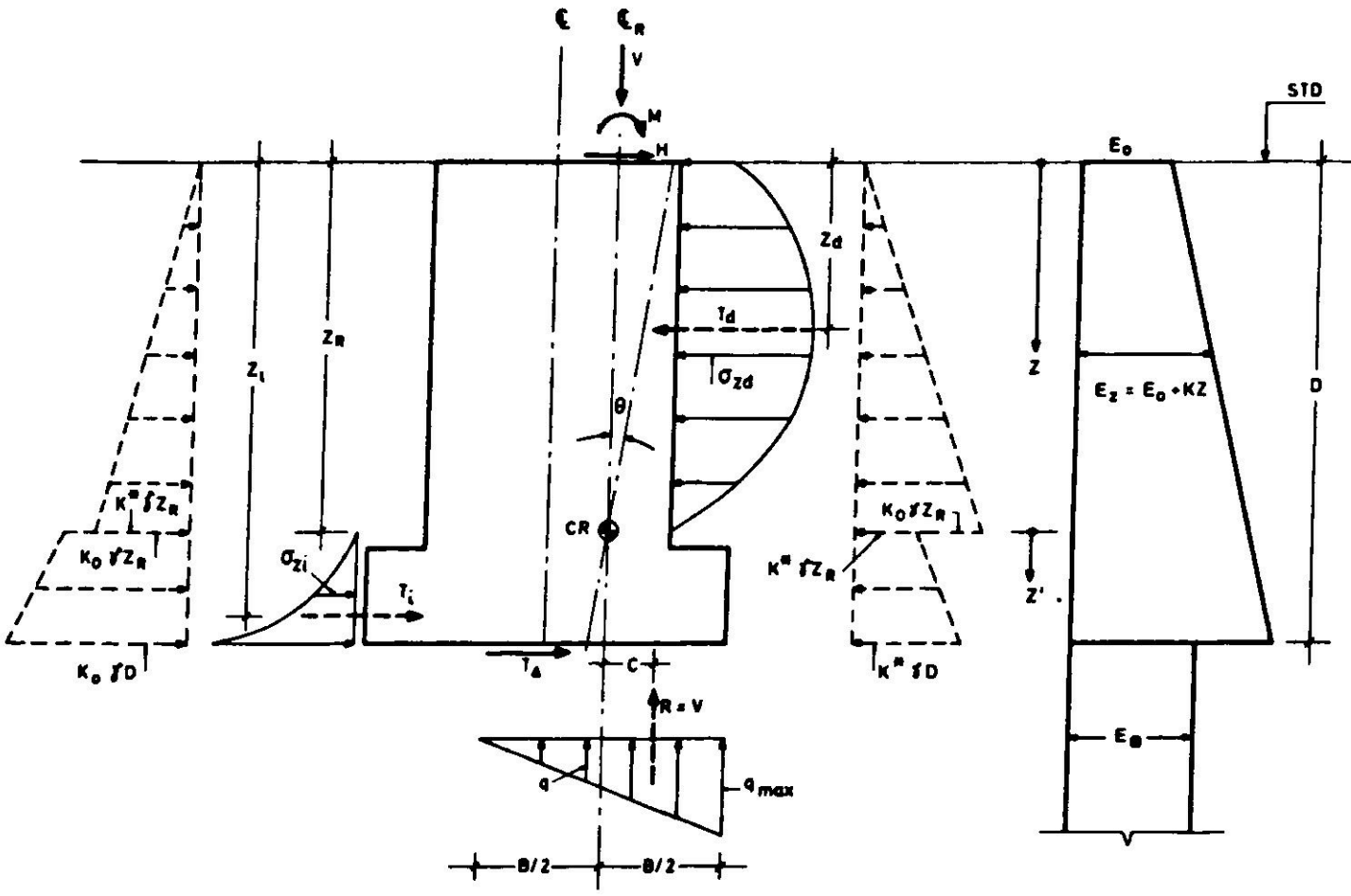
---

* En atención al método de cálculo que más adelante se expone, estas solicitaciones corresponden a las que realmente actúan en la cabeza de la pila después de haber sido trasladadas a la vertical que pasa por el centro de rotación CR.

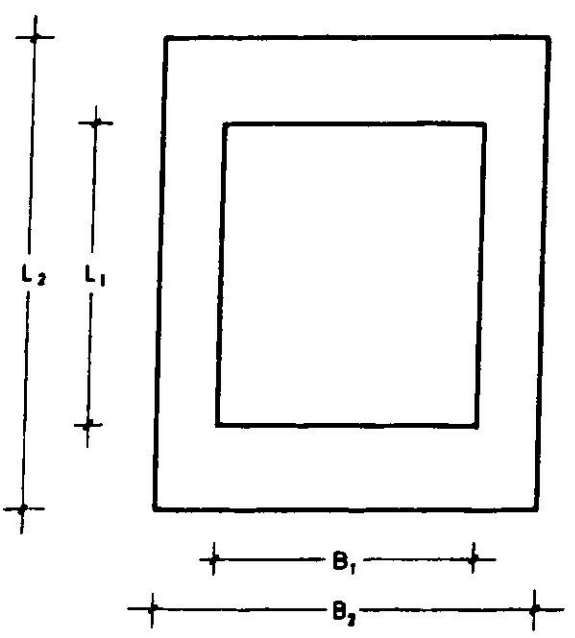
** Normalmente $Z_R < D$.

en la base de la pila, q. Los términos T_d, T_i y R representan las resultantes de los diagramas de presiones de interacción debidas al giro. El término T_Δ corresponde a la fuerza resultante que opone el suelo al desplazamiento horizontal de la base de la pila, cuyo valor puede determinarse aplicando relaciones basadas en la teoría de la elasticidad en el supuesto que la base de la pila se encuentre *soldada* al suelo de apoyo, es decir, no exista deslizamiento.

Adicionalmente existen presiones laterales causadas por el peso propio del suelo confinante que se representan con línea de segmento en la Fig. 2. En la cara derecha de la pila y para $Z < Z_R$ el estado de presión lateral corresponde



a) ELEVACION DE LA PILA



b) PLANTA DE LA PILA

NOTAS:

- M, V y H corresponden a las solicitaciones reales que actúan en la cabeza de la pila después de ser trasladadas a la vertical que pasa por el centro de rotación CR. La solicitación V incluye el peso propio de la pila
- $B \times L_2$ definen el área en compresión a nivel de sello de fundación de la pila.
- L_2 corresponde al lado paralelo al eje del momento M.

Fig. 2. Esquema de solicitaciones sobre la pila y dimensiones características.

a un caso en reposo definido por el coeficiente de transmisión lateral de presiones K_0 y el peso unitario del suelo, γ. En la cara izquierda de la pila que se *despega* del suelo, el estado de presiones se encontrará entre el caso en reposo y el activo dependiendo de la magnitud del giro θ. Este estado se ha representado por un coeficiente de transmisión lateral de presiones $K_0' > K^0 \geqslant K_A$ en que K_A corresponde al coeficiente de empuje activo. Análogamente para $Z > Z_R$ se definen estados de presiones similares a los recientemente descritos con K^0 en la cara derecha (zona de *despegue* de la pila con respecto al suelo) y K_0 en la cara izquierda (zona de la pila que se desplaza en contra del suelo).

El grado de deformabilidad del suelo que confina lateralmente la pila se ha representado por una variación lineal del módulo de deformación, E_z:

$$E_z = E_0 + KZ \qquad D \geqslant Z \geqslant 0 \qquad 1$$

en que E_0 representa el valor del módulo a nivel de la superficie de terreno de diseño STD* y K la velocidad de aumento de dicho módulo con la profundidad. Si el suelo confinante no posee cohesión o cementación estable el valor de $E_o = 0$, con lo cual la variación del módulo de deformación sería del tipo $E_z = KZ$; si se tratara de un suelo puramente cohesivo entonces $E_z = E_0$, constante en toda la profundidad D. Para $Z > D$ se ha considerado un módulo de deformación equivalente constante con la profundidad, E_B, cuyo valor, para suelos que no presenten estratificación, correspondería al obtenido a una profundidad representativa dentro del bulbo de presiones bajo el sello de fundación de la pila. En caso contrario la restricción en la base de la pila habría que expresarla con un módulo E_B equivalente para cada caso en particular (por ejemplo que exista un estrato *incompresible* cercano al sello de fundación de la pila, que el suelo bajo el sello de fundación presente un alto grado de estratificación, etc).

Ecuaciones de equilibrio

Para simplificar el planteamiento de estas ecuaciones se considerará que los diagramas de presión horizontal para $Z < Z_R$ actúan sobre un frente de longitud L_1 y para $Z > Z_R$ sobre un frente de longitud L_2. De acuerdo al esquema de la Fig. 2 lo anterior sería perfectamente válido si el ensanchamiento de la base de la pila se efectúa a una profundidad coincidente con la posición CR. Como se verá más adelante, el centro de rotación se ubica a una profundidad $Z_R \approx 0.8\, D$ la cual, para condiciones típicas de diseño, puede considerarse coincidente con el inicio de la zarpa correspondiente al ensanchamiento basal. Por otra parte, es preciso tener en cuenta que los errores en la determinación de las solicitaciones

---

* La superficie de terreno de diseño define un plano horizontal por debajo del cual el suelo colabora efectivamente a dar restricción lateral. Así por ejemplo, si existen estratos superficiales de suelo, ya sea muy blandos, ya sea con una alta potencialidad de licuación, o simplemente sujetos a ser erosionados, la posición de STD quedaría por debajo de ellos.

de diseño que actúan sobre la cabeza de la pila, los inherentes a la determinación de las características del suelo, etc, superan largamente a los introducidos con la simplificación anterior.

Otra de las simplificaciones que se introduce en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio la constituye el hecho de ignorar las fuerzas de roce y/o adherencia que se desarrollan en las caras laterales de la pila. La aparición de estas fuerzas se origina por el movimiento vertical relativo entre el suelo y la pila asociado al asentamiento y al giro experimentado por ella. Sin embargo, la influencia de dichas fuerzas en su comportamiento es de reducida magnitud y el hecho de ignorarlas hace que, en todo caso, se obtengan resultados que están por el lado de la seguridad.

Definiendo $M_\theta = Rc$ y momentando con respecto al centro de rotación CR se establece:

$$M + HZ_R - Td\,(Z_R - Z_D) - Ti\,(Z_i - Z_R) - T_\Delta\,(D - Z_R) -$$

$$- M_\theta - \frac{1}{6}(K_0 - K^0)\,\gamma\,Z_R^{\,3}\,L_1 - \frac{1}{2}(K_0 - K^0)\,\gamma\,Z_R\,(D - Z_R)^2\,L_2 -$$

$$- \frac{1}{3}(K_0 - K^0)\,\gamma\,(D - Z_R)^3\,L_2 = 0 \qquad 2$$

Estableciendo equilibrio de fuerzas horizontales:

$$H - Td + Ti + T_\Delta - \frac{1}{2}(K_0 - K^0)\,\gamma\,Z_R^{\,2}\,L_1 - \frac{1}{2}(K_0 - K^0)\,\gamma\,Z_R^{\,2}\,L_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(K_0 - K^0)\,\gamma\,D^2\,L_2 = 0 \qquad 3$$

El término M_θ representa el momento de restricción al giro en la base de la pila el cual, a partir de relaciones basadas en la teoría de la elasticidad[13], se puede expresar como:

$$M_\theta = \frac{1}{K_\theta}\,\frac{B^2\,E_B\,L_2}{1 - \nu^2}\,\theta \qquad 4$$

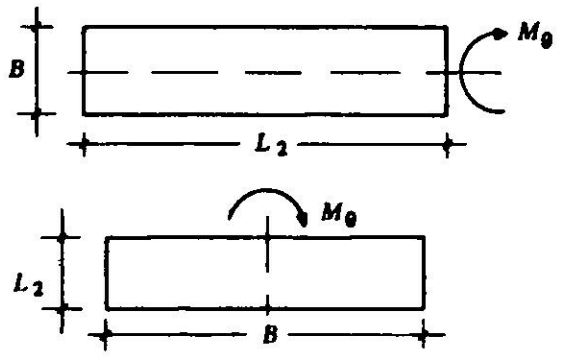
en que K_θ = coeficiente de restricción al giro, que depende de la geometría de la base de la pila en contacto con el suelo según se indica en la Tabla I; ν = módulo de Poisson del suelo de apoyo, considerado igual a 0.30 (valor típico para la mayoría de los suelos).

Para efectos prácticos el valor de K_θ se puede considerar igual a 7.0, lo cual cubre con una razonable precisión situaciones en las que la razón L_2/B se encuentra comprendida entre 1 y 10. Los casos con $L_2/B < 1$ son de poco interés práctico ya que en ellos la restricción en la base cobra mucha importancia frente al confinamiento lateral del suelo que rodea la pila y, por consiguiente, normalmente se tratan ignorando dicho confinamiento (el problema se asimila al de una

TABLA I

COEFICIENTE DE RESTRICCION AL GIRO K_θ

$\alpha = L_2/B$	K_θ	Simbología
0.1	2.5	L_2 = Lado paralelo al eje del momento
0.2	3.3	L_2 x B definen el área en compresión a nivel de sello de fundación.
0.4	4.6	
0.6	5.2	
0.8	5.7	
1	6.0	
2	6.8	
4	7.1	
6	7.3	
8	7.5	
10	7.7	



cimentación superficial, caso *a* en Fig. 1). Sin embargo si en estos últimos casos se persistiera en considerar la colaboración lateral del suelo, habría que emplear valores de K_θ menores que 6.0 con lo cual la restricción al giro suministrada por la base, M_θ, aumenta. En efecto, reemplazando en la ec. (4) los valores de K_θ correspondientes y el valor de $\nu = 0.30$ se obtiene:

$$M_\theta = 0.157\ B^2\ E_B\ L_2\ \theta \qquad \frac{L_2}{B} = 1 \text{ a } 10 \qquad 5$$

$$M_\theta = 0.220\ B^2\ E_B\ L_2\ \theta \qquad \frac{L_2}{B} = 0.5 \text{ a } 1 \qquad 5a$$

La implicancia que tendría utilizar la ec. (5) en lugar de la ec. (5a) en el análisis de pilas con razones $L_2/B < 1$ sería la de sobreestimar el ángulo de giro θ y, por consiguiente, obtener un diseño conservador. Ello se observa claramente en la ec. (20), que se propone más adelante como ecuación simplificada de diseño, en la cual el último término de la expresión para el coeficiente de giro I_θ habría que aumentarlo a medida que L_2/B disminuye (por ej. utilizar $0.157\ \beta$ cuando $L_2/B = 1$ a 10; $0.220\ \beta$ cuando $L_2/B = 0.5$ a 1, etc). No obstante esto, se prefirió plantear una ecuación de diseño sin tener en cuenta la variación de coeficientes señalada recientemente ya que con ello se simplifican los cálculos, sacrificando muy ligeramente la precisión de los resultados la cual, como ya se señaló en párrafos anteriores, no tiene mucho interés práctico cuando $L_2/B < 1$. Por consiguiente sea cual sea la razón L_2/B, en lo sucesivo se utilizará la ec. (5) para representar la restricción al giro en la base de la pila.

El término T_Δ puede expresarse como:

$$T_\Delta = K_H \delta = K_H \theta\ (D - Z_R) \qquad 6$$

en que K_H = coeficiente de restricción al desplazamiento horizontal de la base

de la pila; δ = desplazamiento horizontal de la base que es igual a $\theta\ (D - Z_R)$. El coeficiente K_H depende, entre otras cosas, de la razón largo ancho de la base de la pila en contacto con el suelo (L_2/B). Sin embargo considerando que $D - Z_R$ es pequeño, por ej. $Z_R = 0.8\ D$, el error que se cometa en la determinación de K_H no afecta mayormente los resultados que se obtengan de la resolución del sistema de ecuaciones (2) y (3). Por tal motivo se adoptó una expresión para K_H propuesta por Karasudhi, Keer y Lee[14] que corresponde a una cinta rígida de longitud infinita sometida a la acción de una fuerza horizontal paralela a su lado menor*:

$$T_\Delta = \frac{\pi E_B\ L_2}{4(1+\nu)}\ \theta\ (D - Z_R) \qquad 7$$

Adoptando el valor de $\nu = 0.30$ se obtiene finalmente:

$$T_\Delta = 0.604\ E_B\ L_2\ \theta\ (D - Z_R) \qquad 8$$

Las presiones de interacción σ_{zd}, se determinan utilizando el modelo simplificado que se representa en la Fig. 3a en el cual se considera que la zona de suelo

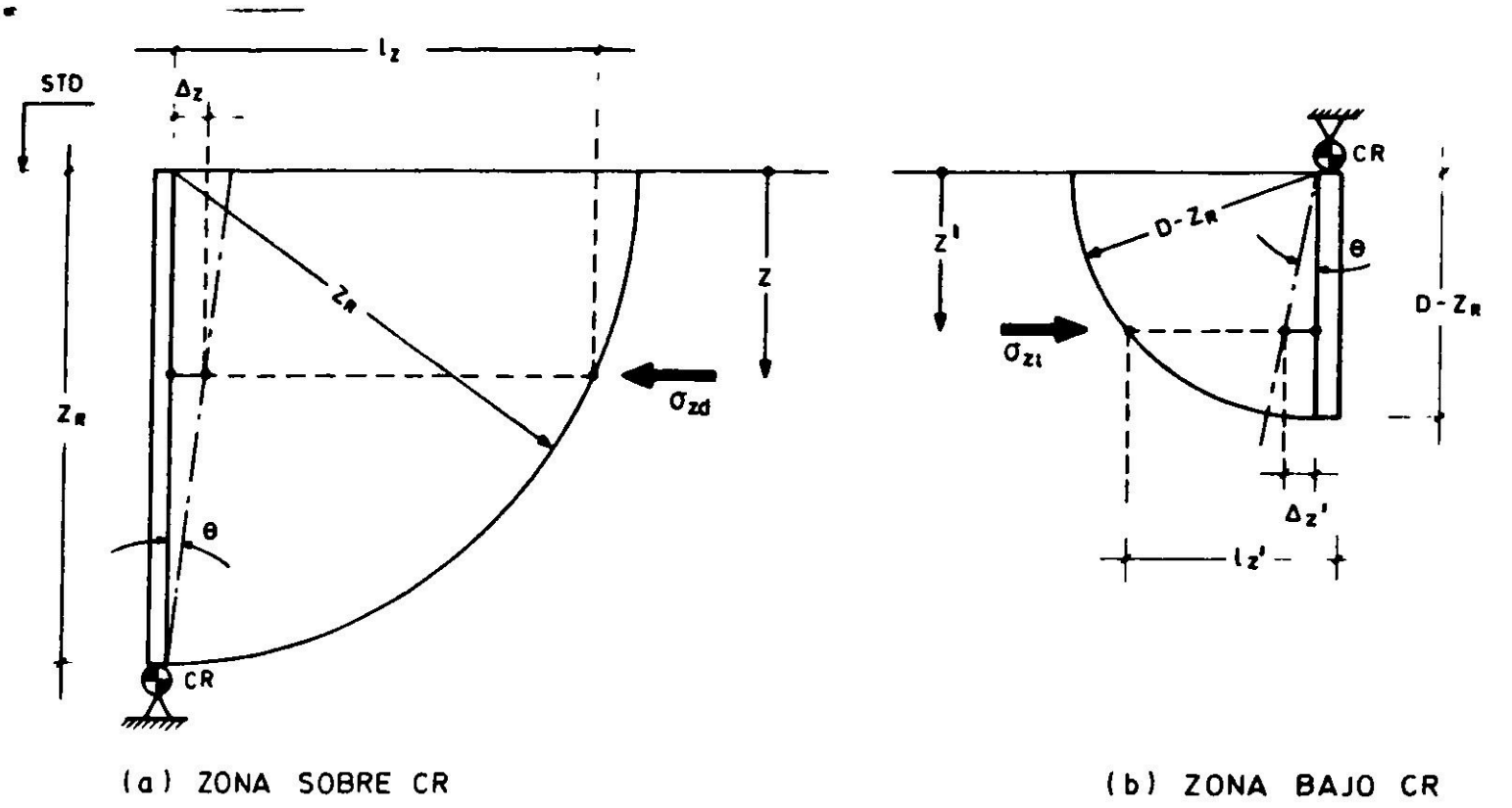


Fig. 3. Esquema para la determinación de las presiones de restricción lateral.

---

* El lado menor corresponde al ancho B ya que se está suponiendo $L_2/B \geqslant 1$. Situaciones en las cuales $L_2/B < 1$ no tienen importancia práctica por las razones ya expuestas anteriormente. Si se persistiera en tomarla en cuenta habría que modificar la expresión de T_Δ dada por la ec. (7), pero ello traería como consecuencia una mayor complejidad en el cálculo que no se justifica. Por consiguiente, sea cual sea la razón L_2/B, se utilizará la ec. (7) para representar la restricción al desplazamiento horizontal en la base de la pila.

sujeta a deformación se encuentra encerrada por una cuña circular de radio igual a Z_R. Considerando un estado de deformaciones planas, que equivale a ignorar la discontinuidad en los extremos de la pila ya que ésta tiene una longitud finita, se obtiene:

$$\sigma_{zd} = \frac{E_z}{1 - \nu^2} \epsilon_{zd} \qquad 9a$$

La deformación unitaria ϵ_{zd} se hace equivalente a la de una columna de longitud l_z sometida a una presión de compresión σ_{zd}:

$$\epsilon_{zd} = \frac{\Delta_z}{l_z} = \frac{\theta(Z_R - Z)}{\sqrt{K_R^2 - Z^2}} \qquad 9b$$

Reemplazando ϵ_{zd} dado por (9b) en la ecuación (9a), considerando que $E_z = E_o + KZ$ y definiendo $u = Z/Z_R$ se obtiene finalmente:

$$\sigma_{zd} = \frac{E_o\ \theta}{1 - \nu^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} + \frac{K\theta\ Z_R}{1 - \nu^2}\ u\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \qquad 9$$

La resultante T_d se obtiene por integración del diagrama de presiones σ_{zd}:

$$T_d = \int_0^{Z_R} \sigma_{zd}\, L_1\, dz = \frac{E_o\ L_1\ \theta\ Z_R}{1 - \nu^2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du + \frac{KL_1\theta\ Z_R^2}{1 - \nu^2}\int_0^1 u\sqrt{\frac{1-u}{1-u}}\,du \qquad 10a$$

para $\nu = 0.30$ $\qquad T_d = 0.626\ E_o\ L_1\ \theta\ Z_R + 0.23\ KL_1\ \theta\ Z_R^2 \qquad 10$

La posición Z_d de la resultante T_d queda dada por:

$$Z_d = \frac{\int_0^{Z_R} \sigma_{zd}\ L_1\ Z\ dZ}{T_d} = \frac{0.237\ E_o\ Z_R + 0.126\ K\ Z_R^2}{0.626\ E_0 + 0.23\ KZ_R} \qquad 11$$

La expresión para σ_{zi} se puede obtener siguiendo un procedimiento enteramente

similar al empleado en la determinación de σ_{zd}. Utilizando el modelo simplificado de la Fig. 3b se tiene:

$$\sigma_{zi} = \frac{E_z}{1 - \nu^2} \epsilon_{zi} \qquad 12a$$

$$\epsilon_{zi} = \frac{\Delta Z'}{l'_z} = \frac{\theta Z'}{\sqrt{(D - Z_R)^2 - (Z')^2}} \qquad 12b$$

Reemplazando ϵ_{zi} dado por (12b) en la ecuación (12a) y definiendo $u' = Z'/(D - Z_R)$ se obtiene:

$$\sigma_{zi} = \frac{E_z}{1 - \nu^2} \theta \frac{u'}{\sqrt{1 - u'^2}} \qquad 12c$$

Debido a que $D - Z_R$ es pequeño, el valor de E_z en la ec. (12c) se puede expresar sin cometer un error de consideración como el promedio entre los módulos de deformación para $Z = Z_R$ y $Z = D$. Si consideramos $Z_R = 0.87$ D, relación que en lo sucesivo se adoptará para simplificar los cálculos y, como se verá, implica errores en la determinación del giro θ del orden de 10°/o, se tiene la siguiente expresión para el módulo de deformación promedio:

$$E_{izq} = 0.5 \left\{ (E_o + 0.87\, KD) + (E_o + KD) \right\} = E_o + 0.935\, KD \qquad 12d$$

con lo cual

$$\sigma_{zi} = \frac{E_{izq}\, \theta}{1 - \nu^2} \frac{u'}{\sqrt{1 - u'^2}} \qquad 12$$

La resultante T_i se obtiene por integración del diagrama de presiones σ_{zi}:

$$T_i = \int_0^{D - Z_R} \sigma_{zi}\, L_2\, dz' = \frac{E_{izq}\, L_2\, \theta\, (D - Z_R)}{1 - \nu^2} \int_0^1 \frac{u'}{\sqrt{1 - u'^2}}\, du' \qquad 13a$$

para $\nu = 0.30$ $\qquad T_i = 1.1\, E_{izq}\, L_2\, \theta\, (D - Z_R)$ $\qquad 13$

La posición Z_i de la resultante T_i queda dada por:

$$Z_i = Z_R + \frac{\int_0^{D-Z_R} \sigma_{zi}\, L_2\, Z'\, dZ'}{T_i} = 0.785\, D + 0.215\, Z_R \qquad 14$$

Para los efectos de simplificar los términos debidos a los empujes por peso propio del suelo presentes en la ec. (2) se adoptará un valor típico de $\gamma = 2$ t/m^3. Por otra parte, definiendo $\beta' = L_2/L_1$ y $t = Z_R/D$, los términos de peso propio en dicha ecuación pueden expresarse como:

$$-\frac{1}{6}(K_o - K^0)\,\gamma\, Z_R^3\, L_1 - \frac{1}{2}(K_o - K^0)\,\gamma\, Z_R\,(D - Z_R)^2\, L_2 - \frac{1}{3}(K_o - K^0)\,\gamma\,(D - Z_R)^3\, L_2 =$$

$$= (K_o - K^0)\, D^3\, L_1 \left\{-0.334\, t^3 - t\,(1-t)^2\,\beta' - 0.67\,(1-t)^3\,\beta'\right\} = -(K_o - K^0)\, D^3\, L_1\, p$$

En la Tabla II se dan valores de p en función de β' y t. Considerando que en la mayoría de los casos el valor de t oscila entre 0.80 y 0.95 se adopta un valor $p = 0.25$ t/m^3 con lo cual la ec. (2) se reduce a la expresión siguiente:

$$M + HZ_R - T_d\,(Z_R - Z_d) - T_i\,(Z_i - Z_R) - T_\Delta\,(D - Z_R) - M_\theta - 0.25\,(\text{ton/m}^3)\,(K_o - K^0)\,D^3 L_1 \qquad 15$$

TABLA II

COEFICIENTE p

t	p(ton/m^3)			
	$\beta' = 1$	$\beta' = 1.25$	$\beta' = 1.5$	$\beta' = 2$
0.80	0.21	0.22	0.23	0.24
0.85	0.23	0.23	0.24	0.25
0.90	0.25	0.25	0.26	0.26
0.95	0.29	0.29	0.29	0.29
1.00	0.33	0.33	0.33	0.33

A base de los trabajos relacionados con la reducción del coeficiente de transmisión lateral de presiones K^0 desde un estado en reposo ($K^0 = K_o$) a uno activo ($K^0 = K_A$) realizados por diferentes investigadores[15 a 18], R. González[19] estableció una relación simplificada del tipo:

$$K_o - K^0 = 400\,\theta\,(K_o - K_A) \qquad 16a$$

En esta ecuación θ está expresado en radianes y su validez se extiende a valores de $\theta \leq 0.0025$ (para $\theta > 0.0025$ se adopta $K_0 - K^0 = K_0 - K_A$)

Considerando que $K_o \approx 1\text{-sen}\phi$ y $K_A = (1\text{-sen}\phi)/(1+\text{sen}\phi)$, la diferencia $K_o - K_A$ para valores de ϕ comprendidos entre 30° y 40° resulta aproximadamente igual a 0.16 ± 0.01. Para efectos prácticos se adopta $K_o - K_A = 0.15$ con lo cual la ec. (16a) se transforma a:

$$K_o - K^0 = 60\theta \qquad 16$$

Reemplazando en (15) el término $K_o - K^0$ dado por (16) se obtiene finalmente la siguiente ecuación de equilibrio de momentos:

$$M + HZ_R - T_d(Z_R - Z_d) - T_i(Z_i - Z_R) - T_\Delta\,(D - Z_R) - M_\theta - 15(\text{t/m}^3)\theta D^3 L_1 = 0 \qquad 17$$

En la ec. (3) que establece el equilibrio de fuerzas horizontales no se trabajó para simplificar los términos correspondientes al peso propio del suelo ya que dicha ecuación, como se verá más adelante, tuvo un uso restringido en el que se ignoró los términos de peso propio del suelo.

SOLUCION DE LAS ECUACIONES

Simplificaciones

Con el fin de simplificar la solución del sistema de ecuaciones (2) y (3) en una primera instancia se establecieron las siguientes simplificaciones: (i) se ignora el efecto de los términos correspondientes al peso propio del suelo; (ii) la variación lineal del módulo de deformación del suelo entre STD y el sello de fundación de la pila se hace equivalente a un módulo de deformación constante equivalente E^0 (esto implica adoptar $E_0 = E^0$ y $E = 0$). Reemplazando entonces en las ecs. (2) y (3) los términos dados por las ecs. (5),(8),(10),(11),(13) y (14) se obtienen los valores de la razón Z_R/D dados en la Fig. 4 en función de la razón de solicitaciones M/H. De

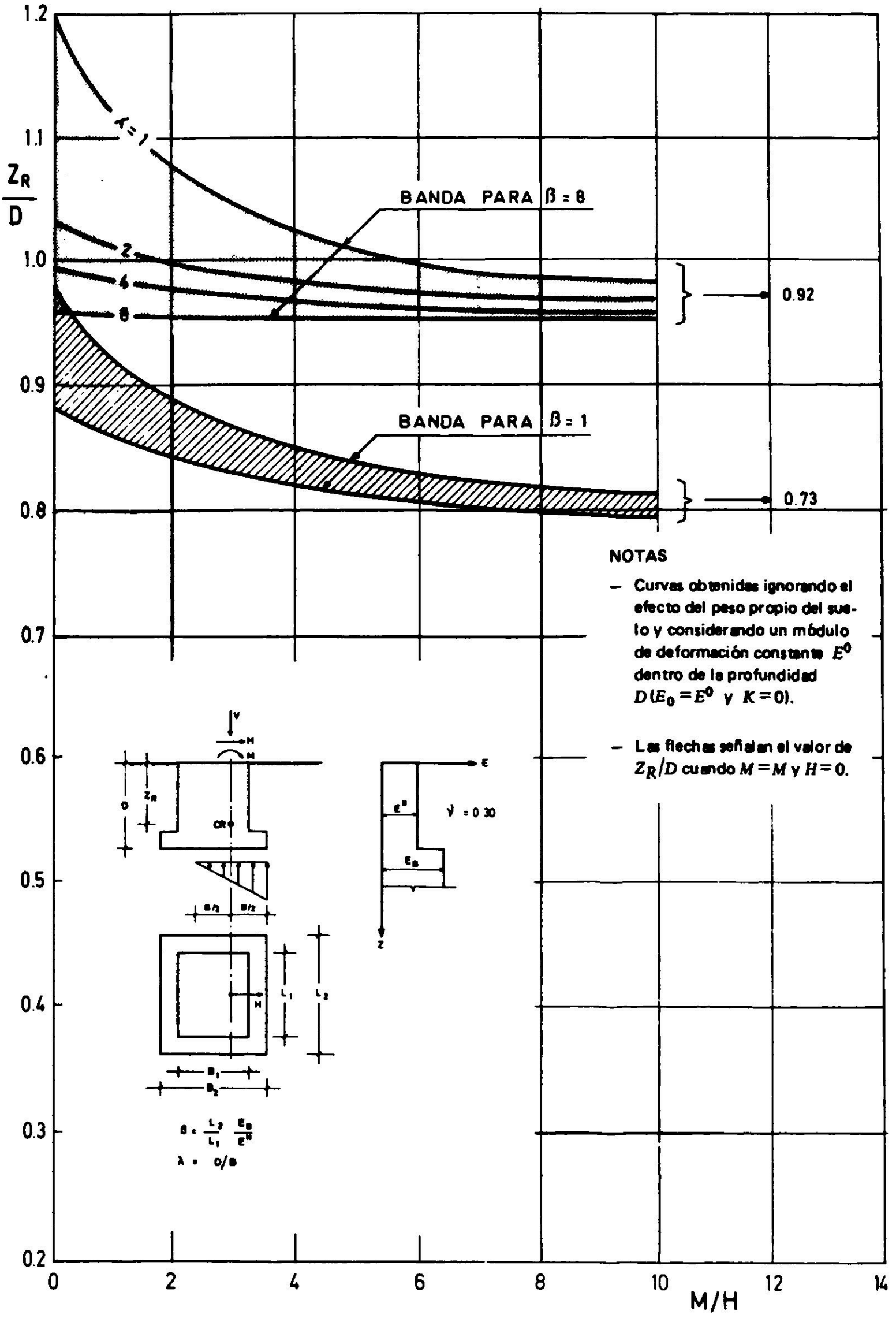


Fig. 4. Posición normalizada del centro de rotación.

la observación de esta figura se concluye que el rango típico de variación de la razón Z_R/D oscila entre 0.80 y 0.95. Adoptando estos valores extremos y utilizando la ec. (2), en la que se ignoran los términos debidos al peso propio del suelo, se obtienen las siguientes expresiones para el ángulo de giro de la pila:

$$\frac{Z_R}{D} = 0.80: \theta = \frac{M + 0.8\,HD}{L_1\,E^0\,B^2\,(0.249\,\lambda^2 + 0.035\,\beta'\,\lambda^2 + 0.024\,\beta\lambda^2 + 0.157\,\beta)} \quad 18$$

$$\frac{Z_R}{D} = 0.95: \theta = \frac{M + 0.95\,HD}{L_1\,E^0\,B^2\,(0.351\,\lambda^2 + 0.002\,\beta'\,\lambda^2 + 0.0015\beta\lambda^2 + 0.157\,\beta)} \quad 19$$

en que:

$$\lambda = \frac{D}{B}; \qquad \beta' = \frac{L_2}{L_1} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{L_2\,E_B}{L_1\,E^0}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden simplificar haciendo $\beta' = 1.0$ lo cual implica sobreestimar el ángulo θ cuando $\beta' > 1.0$. Sin embargo el error porcentual asociado a esta sobreestimación no es significativo frente a otras fuentes de error más importantes, como son las inherentes a la determinación de módulos de deformación del suelo (por ej. E^0 y E_B). Ello queda de manifiesto en los resultados expuestos en la Tabla III, donde se presenta la razón $(\theta\beta'=1)/\theta\beta'$ siendo $\theta\beta' = 1$ el ángulo de giro haciendo la simplificación $\beta' = 1$ en las ecs. (18) ó (19) y $\theta\beta'$ el obtenido sin efectuar dicha simplificación.

TABLA III

RAZON $(\theta'_\beta = 1)/\theta'_\beta$

$\lambda = D/B$	$\beta = 1$		$\beta = 2$		$\beta = 4$		$\beta = 8$	
	$\beta' = 1.25$	$\beta' = 2.0$	$\beta' = 1.25$	$\beta' = 2.0$	$\beta' = 1.25$	$\beta' = 2.0$	$\beta' = 1.25$	$\beta' = 2.0$
1	1.02 (1.00)	$1{,}07^5$ (1.00)	1.01 (1.00)	1.05 (1.00)	1.01 (1.00)	1.03^5 (1.00)	1.00^5 (1.00)	1.02 (1.00)
2	1.02^5 (1.00)	1.10 (1.00^5)	1.02 (1.00)	1.08^5 (1.00^5)	1.02 (1.00)	1.06^5 (1.00^4)	1.01 (1.00)	1.04 (1.00)
4	1.03 (1.00)	1.11 (1.00^5)	1.02^5 (1.00)	1.10 (1.00^5)	1.02 (1.00)	1.08 (1.00^4)	1.01^5 (1.00)	1.06 (1.00^4)

NOTA: Sin paréntesis valores obtenidos utilizando ec. (18)
Entre paréntesis valores obtenidos utilizando ec. (19)

Con el fin de analizar la influencia de la razón Z_R/D en el valor del ángulo de giro las ecs. (18) y (19) pueden escribirse como sigue:

$$\frac{Z_R}{D} = 0.80 \text{ y } \beta' = 1.0: \theta = \frac{H}{L_1 E^0 B^2} \frac{M/H + 0.8\,\lambda B}{(0.284\lambda^2 + 0.024\beta\lambda^2 + 0.157\beta)} \quad 18a$$

$$\frac{Z_R}{D} = 0.95 \text{ y } \beta' = 1.0: \theta = \frac{H}{L_1 E^0 B^2} \frac{M/H + 0.95\,\lambda B}{(0.353\lambda^2 + 0.0015\beta\lambda^2 + 0.157\beta)} \quad 19a$$

Comparando los ángulos de giro obtenidos con estas ecuaciones para valores de M/H comprendidos entre 1 y 8, valores de λ entre 1 y 4, y valores de B entre 1 y 4 m se obtienen diferencias porcentuales máximas de 15°/o para $\beta = 4$, disminuyendo a porcentajes inferiores a 10°/o cuando $\beta \leqslant 2.0$. Desde un punto de vista práctico estas diferencias pueden considerarse pequeñas y, por consiguiente, para el diseño se puede considerar una razón $Z_R/D = 0.87$, que está entre los valores extremos considerados en el análisis anterior.

Ecuación de diseño

Adoptando una razón $Z_R/D = 0.87$, considerando una variación lineal del módulo de deformación del suelo confinante $E_z = E_o + KZ$ y utilizando la ecuación (17), previo reemplazo en ella de los términos T_d, Z_d, etc, se obtiene la siguiente expresión del ángulo de giro:

$$\theta = \frac{M + 0.87\,DH - 15(\text{ton/m}^3)\,\theta D^3 L_1}{B^2 L_1 \left\{ (E_o + KD\frac{0.068 + 0.014\beta'}{0.295 + 0.015\beta'})(0.295\lambda^2 + 0.015\beta'\lambda^2) + 0.01\beta' E_B \lambda^2 + 0.157\beta' E_B \right\}} \quad 20a$$

Definiendo un módulo de deformación constante equivalente E^0 entre STD y la profundidad D como:

$$E^0 = E_o + KD \frac{0.068 + 0.014\,\beta'}{0.295 + 0.015\,\beta'} \quad 20b$$

se obtiene la siguiente expresión del ángulo de giro:

$$\theta = \frac{M + 0.87\,DH - 15(\text{ton/m}^3)\theta D^3 L_1}{L_1\ E^0\ B^2\ (0.295\,\lambda^2 + 0.015\,\beta'\,\lambda^2 + 0.01\,\beta\lambda^2 + 0.157\,\beta)} \quad 20c$$

La ecuación (20c) es similar a las ecs. (18) y (19) produciéndose diferencias en los coeficientes numéricos debido a que ahora se ha trabajado con la razón

de diseño $Z_R/D = 0.87$ en lugar de 0.80 ó 0.95. Adicionalmente en el numerador de la ec. (20c) aparece el término debido al efecto del peso propio del suelo que no había sido considerado en la deducción de las ecs. (18) y (19). En atención a que el error cometido al hacer $\beta' = 1.0$ en las ecs. (18) ó (19) no afectaba significativamente los resultados, es posible efectuar la misma simplificación en la ec. (20c) con lo que se obtiene finalmente la siguiente expresión:

$$\theta = \frac{M + 0.87\,DH - 15(\text{ton/m}^3)\,\theta\,D^3 L_1}{L_1\,E^0\,B^2\,I_\theta} \qquad 20$$

en que

$$I_\theta = 0.31\,\lambda^2 + 0.01\,\beta\,\lambda^2 + 0.157\,\beta$$

$$E^0 = E_o + KD\,\frac{0.068 + 0.014\,\beta'}{0.295 + 0.015\,\beta'}$$

En la Fig. 5 se presentan curvas que permiten determinar en forma relativamente rápida el coeficiente de giro I_θ y, por consiguiente, el ángulo de giro θ a traves de la ec. (20). Para simplificar los cálculos el término debido al peso propio del suelo ($15\,\theta D^3 L_1$) se puede ignorar en una primera instancia. Con el valor de θ así calculado se procede a determinar un nuevo valor del ángulo de giro empleando la ec. (20) sin despreciar el término debido al peso propio. Este proceso de aproximaciones sucesivas continúa hasta lograr la precisión deseada en los cálculos. Cabe señalar que si en algún momento de dicho proceso resulta $\theta \geqslant 0.0025$ rad el término $15\,\theta D^3 L_1$ se debe calcular con $\theta = 0.0025$ rad.

Finalmente es preciso hacer notar que en suelos que presenten cohesión el efecto del peso propio del suelo debe ignorarse, especialmente si la altura crítica del suelo que embebe laterlamente la pila es igual o superior a la altura D. En suelos sin cohesión o con cohesión muy baja en los que no se satisfaga la condición anterior sería necesario incorporar el efecto del peso propio. Sin embargo, dado que en tales casos el hecho de ignorar su efecto suministra valores del giro θ mayores a los reales, se recomienda no considerarlo en aras de aumentar el coeficiente de seguridad en el diseño y de simplificar los cálculos.

Verificaciones de diseño

Una vez determinado el giro θ es posible calcular el momento M_θ en la base de la pila mediante la ec. (5). Con el valor de M_θ y la solicitación vertical en dicha base se determina el diagrama de presiones de contacto el que debe ser compatible con la fatiga admisible del suelo. Paralelamente, mediante las ecs. (9) y (12), se establecen las presiones de interacción horizontal, cuyos valores deben ser inferio-

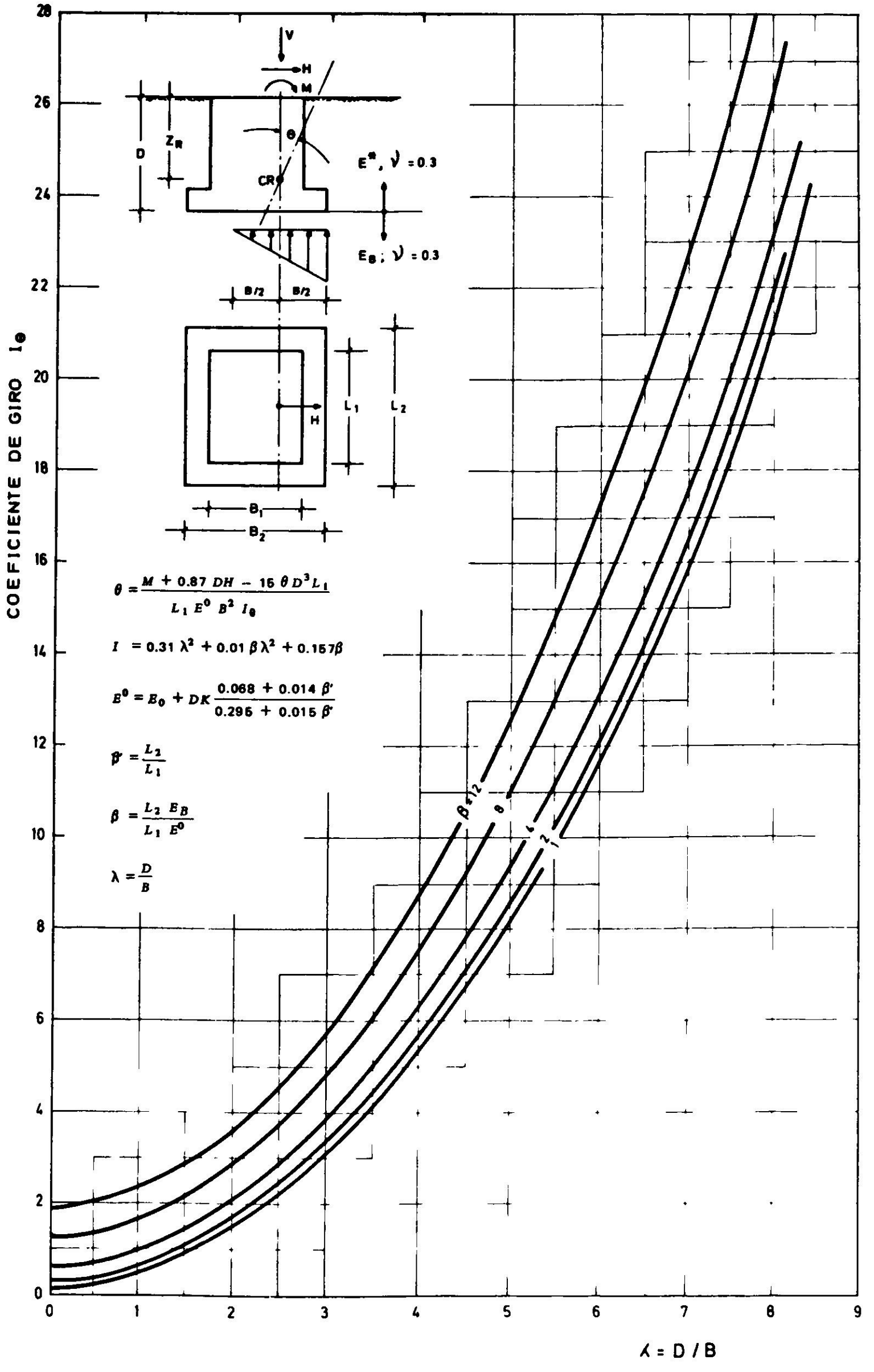


Fig. 5. Valores del coeficiente de giro I_θ.

res a la resistencia pasiva del suelo que embebe la pila. Finalmente, el valor de la solicitación horizontal T_Δ en la base de la pila, determinada mediante la ec. (8), debe ser compatible con la resistencia al deslizamiento por fricción y/o adherencia en dicha base.

En lo que respecta a verificaciones de desplazamiento, tales como el giro θ y el asentamiento de la pila, éstas se harán comparándolos con los límites admisibles correspondientes a cada caso en particular.

RESULTADOS

Con el fin de analizar los resultados obtenidos con la ecuación de diseño, éstos se comparan con los formulados por Douglas y Davis[2] para una placa rígida de gran longitud, delgada y embebida una profundidad D en un espacio semi-infinito homogéneo, isótropo y elástico. Douglas y Davis consideran que el módulo de deformación del medio, E, es constante con la profundidad, que no ejerce empujes debido a su peso propio y que existe adherencia perfecta entre la placa y el medio. En la cabeza de la placa actúan un momento M_1 y una fuerza horizontal H_1 por unidad de longitud. Con estas consideraciones, aplicando las ecuaciones de Mindlin y adoptando $\nu = 0.50$, obtienen los resultados indicados en la Tabla IV. Para el caso en que el medio no resistiera tracciones, es decir, el medio no opone resistencia a la placa en la zona en que ésta tiende a *despegarse*, Douglas y Davis establecen que la desangulación y los desplazamientos en su cabeza podrían verse aumentados al doble. Esto es obviamente una aproximación, pero en todo caso da un orden de magnitud de los resultados. Considerando este aumento, a fin de comparar los valores dados por Douglas y Davis con los obtenidos mediante la ecuación de diseño propuesta en este trabajo (que supone que el medio no resiste tracciones), se obtienen diferencias del orden de 25°/o. Este porcentaje resulta bastante notable por tratarse de resultados obtenidos con metodologías diferentes y por la aproximación introducida al duplicar las deformaciones dadas por Douglas y Davis con cargo a la eliminación de la resistencia a la tracción del medio.

Con el fin de ilustrar la aplicación de las fórmulas propuestas se han desarrollado cinco ejemplos que se exponen en el Anexo y cuyos resultados se resumen en la Tabla V. Estos resultados se comparan con los obtenidos para situaciones en las que se ignora el efecto de la restricción lateral del suelo que embebe la pila. Dicha comparación, expresada en términos del volumen de hormigón de la pila, pone de manifiesto la importancia que tiene la restricción lateral del suelo, especialmente en aquellos casos en los que no existen diferencias importantes entre el módulo de deformación del suelo de apoyo y el del suelo que rodea lateralmente la pila. Otro aspecto de interés indicado por los resultados lo constituye la mayor influencia que tiene el efecto de la restricción lateral cuando se permiten tracciones en la base de la pila.

TABLA IV

COMPARACION DE RESULTADOS

Método	Debido a M_1		Debido a H_1	
	Desangulación	Desplazamiento lateral en la cabeza	Desangulación	Desplazamiento lateral en la cabeza
Douglas y Davis con resistencia a tracción	$2.5\ \frac{M_1}{ED^2}$	$1.5\frac{M_1}{ED}$	$1.6\frac{H_1}{ED}$	$\frac{H_1}{E}$
Douglas y Davis sin resistencia a tracción	$5.0\ \frac{M_1}{ED^2}$	$3.0\frac{M_1}{ED}$	$3.2\frac{H_1}{ED}$	$2.0\ \frac{H_1}{E}$
Método propuesto con Z_R obtenido de Fig. 4	$3.4\ \frac{M_1}{ED^2}$	$2.5\frac{M_1}{ED}$	$2.7\frac{H_1}{ED}$	$2.3\ \frac{H_1}{E}$

TABLA V

RESUMEN DE RESULTADOS PARA EJEMPLOS DESARROLLADOS EN EL ANEXO

Caso	Tipo de suelo	Criterio de diseño	Giro (rad)	Dimensión pila (m)	Volumen pila (m^3)	Razón volumen	Area en compresión / Area total	Factor seguridad al volcamiento
1 Restricción	Arcilla	Sin tracción	3.6×10^{-3}	1.85 x 1.85 x 2.0	6.8	0.43	1.00	No hay plastificación
1 Aire		en SF	3.5×10^{-3}	2.80 x 2.80 x 2.0	15.7		1.00	Adecuado
2 Restricción	Arena	Sin tracción	1.1×10^{-3}	2.40 x 2.40 x 2.0	11.5	0.73	1.00	No hay plastificación
2 Aire		en SF	1.0×10^{-3}	2.80 x 2.80 x 2.0	15.7		1.00	Adecuado
2a Restricción	Arena	Con zona tracción pero $q_{máx} = q_{adm}$ en SF.	4.1×10^{-3}	1.30 x 1.30 x 2.0	3.4	0.37	0.46	Hay plastificación
2a Aire			3×10^{-3}	2.15 x 2.15 x 2.0	9.2		0.37	1.40
3 Restricción	Arcilla sobre grava	Sin tracción	5.4×10^{-4}	2.55 x 2.55 x 2.0	13.0	0.83	1.00	No hay plastificación
3 Aire		en SF	5.2×10^{-4}	2.80 x 2.80 x 2.0	15.7		1.00	Adecuado
3a Restricción	Arcilla sobre grava	Con zona tracción pero $q_{máx} = q_{adm}$ en SF	2.4×10^{-3}	1.60 x 1.60 x 2.0	5.1	0.64	0.24	No hay plastificación
3a Aire			3×10^{-3}	2.0 x 2.0 x 2.0	8.0		0.18	1.13

Restricción : Significa que toma en cuenta la restricción lateral del suelo que rodea la pila.

Aire : Se considera que la pila está rodeada por aire, es decir, se ignora la restricción lateral.

Sin tracción : Toda el área de la base de la pila está en contacto con el suelo, produciendo fatiga de contacto nula en uno de los bordes.

Con zona tracción : Sólo parte de la base de la pila está en contacto con el suelo, pero se respeta la condición $q_{máx} = q_{adm}$ a nivel de sello de fundación de la pila

Razón volumen: Volumen pila considerando restricción dividido por volumen pila rodeada por aire.

NOTA 1 : Para el caso 1 se obtuvo idéntico resultado con criterio sin tracción y con criterio $q_{máx} = q_{adm}$ en SF.

NOTA 2 : Cuando se considera restricción lateral no tiene sentido hablar de volcamiento ya que en estos casos lo único que puede ocurrir es la plastificación del suelo que rodea la pila con el consiguiente aumento del giro.

Cuando no hay tracción en SF y se ignora la restricción lateral no es necesario verificar al volcamiento

Como era de esperar, en este último caso resultan pilas de menor volumen según se observa al comparar los casos (2) con (2a) y (3) con (3a). Sin embargo, cuando se permiten tracciones para lograr que la fatiga de contacto máximo en la base de la pila sea igual a la admisible, el suelo que rodea la pila puede entrar en plastificación (ver caso 2a) o bien alcanzar un factor de seguridad al volcamiento bajo (ver caso 3a). De aquí se desprende que se debe ser más riguroso en el proceso de verificaciones de cálculo cuando se trabaje con dicho criterio de diseño recomendandose tener un mínimo de 70°/o de área en compresión cuando se trate de arenas y uno de 50°/o cuando se trate de gravas. Si se emplea el criterio de no aceptar tracciones en la base de la pila lo más probable es que los niveles de fatiga tanto laterales como basales sean inferiores a los admisibles eliminándose el problema de plastificación (cuando se considera restricción lateral) o de volcamiento (cuando no se considera).

CONCLUSIONES

Se plantea una metodología de cálculo simplificada para determinar desplazamientos y presiones de interacción laterales y basales en pilas de fundación rígidas. Los resultados obtenidos con el método concuerdan relativamente bien con los obtenidos por Douglas y Davis[2] para el caso particular de una placa rígida de reducido espesor embebida en un medio elástico. Sin embargo, debería implementarse un programa de ensayos de terreno con el fin de validar la metodología propuesta antes de incorporarla en forma masiva a la práctica ingenieril. No obstante lo anterior, se estima podría ser empleada en casos en los que el criterio de diseño impida la aparición de zonas traccionadas en la base de la pila o las limite a valores mínimos ya que con ello se lograría un factor de seguridad adecuado.

La incorporación de la restricción del suelo que embebe lateralmente la pila, introduce una reducción de su volumen que se torna muy importante cuando la rigidez de dicho suelo es similar a la del horizonte de apoyo basal. Como corolario de lo anterior se concluye que el hecho de ignorar dicha restricción conduce a diseños conservadores, especialmente si en ellos no se admiten tracciones en el sello de fundación de la pila.

REFERENCIAS

1. GETZLER, Z. Contribution to the analysis of restraint in soil, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, A.S.C.E., marzo, 1968.
2. DOUGLAS, D.J. y DAVIS, E.H. The movement of buried footings due to moment and horizontal load and the movement of anchor plates. *Géotechnique*, vol. XIV, nº 2, june 1964.

3. BERIO, A. New suggestions concerning the calculation of prismatic foundations for transmision line towers. *Proceedings Conférence Internacionale des Grands Réseaux Electriques á Haute Tension*, N° 228, París, Francia, 1950.
4. DAVISON, M.T. y PRAKASH, S. A review of soil pole behavior. *Highway Research Record*, N° 39. 42nd Annual Meeting, Enero 1963.
5. DOWNS, D.L. y CHIEURZZI, R. Transmission tower foundations. *Journal of the Power Division, A.S.C.E.*, vol. 92, N° PO2, Proc. Paper 4750, abril 1966.
6. FORDHAM, A.A. The lateral pressure of earth against footings subjected to overturning moment. *The Structural Engineer*, 22, 1944.
7. KODNER, R.L. y GREEN, G.E. Lateral stability of rigid poles subjected to a ground line thrust. *Bulletin 342, Highway Research Board*, 1962.
8. RAMELOT, CH. y VANDEPERRE, L. Les fondation de pylones electriques: leur resistance au reversement, leur stabilité, leur calcul, étude experimentale. *Travaux de la Commision d'Etude des Fondation de Pylones de la Société Intercommunale Belge d'Electricité*, Comptes Rendus de Recherches, I.R.S.I.A., I.W.O.N.L., N° 2, febrero 1950.
9. ROSCOE, K.H. A Comparison of tied and free pier foundations, IVth, ICSMFE, London, vol. I, Agosto 1957.
10. ROSCOE, K.H. *Discussion* presented at the IVth ICSMFE, London vol. III pp. 142–144, agosto 1957.
11. ROSCOE, K.H. y SCHOFIELD, A.N. The stability of short pier foundations in sand. Symposium on the Plastic Theory of Structures, Cambridge. *British Welding Journal*, 3 (8), 1956.
12. SHUNTA SHIRAISHI. *Resistance of foundation ground against overturning forces.*
13. BARKAN, D.D. *Dynamics of bases and foundations.* Mc Graw - Hill, 1962.
14. KARASUDHI; KEER y LEE. Vibratory motion of a body on an elastic halfspace. *Journal of Applied Mechanics*, 1968.
15. FINN, W.D.L. Boundary value problems of soil mechanics. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E.*, Paper 3648, septiembre 1963.
16. LAYANDY, B. The mobilization of shear strength in the active Rankine case of earth pressure. *Proceedings of Brussels Conference on Earth Pressure Problems*, vol. 1, pp. 133, Bruselas, 1958.
17. MORGENSTERN, N.R. y EISENSTEIN, Z. Methods of estimating lateral loads and deformations, A.S.C.E. Specialty Conference on Lateral Stresses and Design of Earth Structures, Cornell University, Junio 1970.
18. TERZAGHI, K. A fundamental fallacy in earth pressure computations. *Journal of the Boston Society of Civil Engineers*, abril 1936.
19. GONZALEZ, R. Comportamiento de un muro de fundación sometido a la acción de una fuerza horizontal y un momento. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil, Universidad Técnica Federico Santa María, 1974.

SOIL LATERAL RESTRAIN IN RIGID FOUNDATIONS

SUMMARY

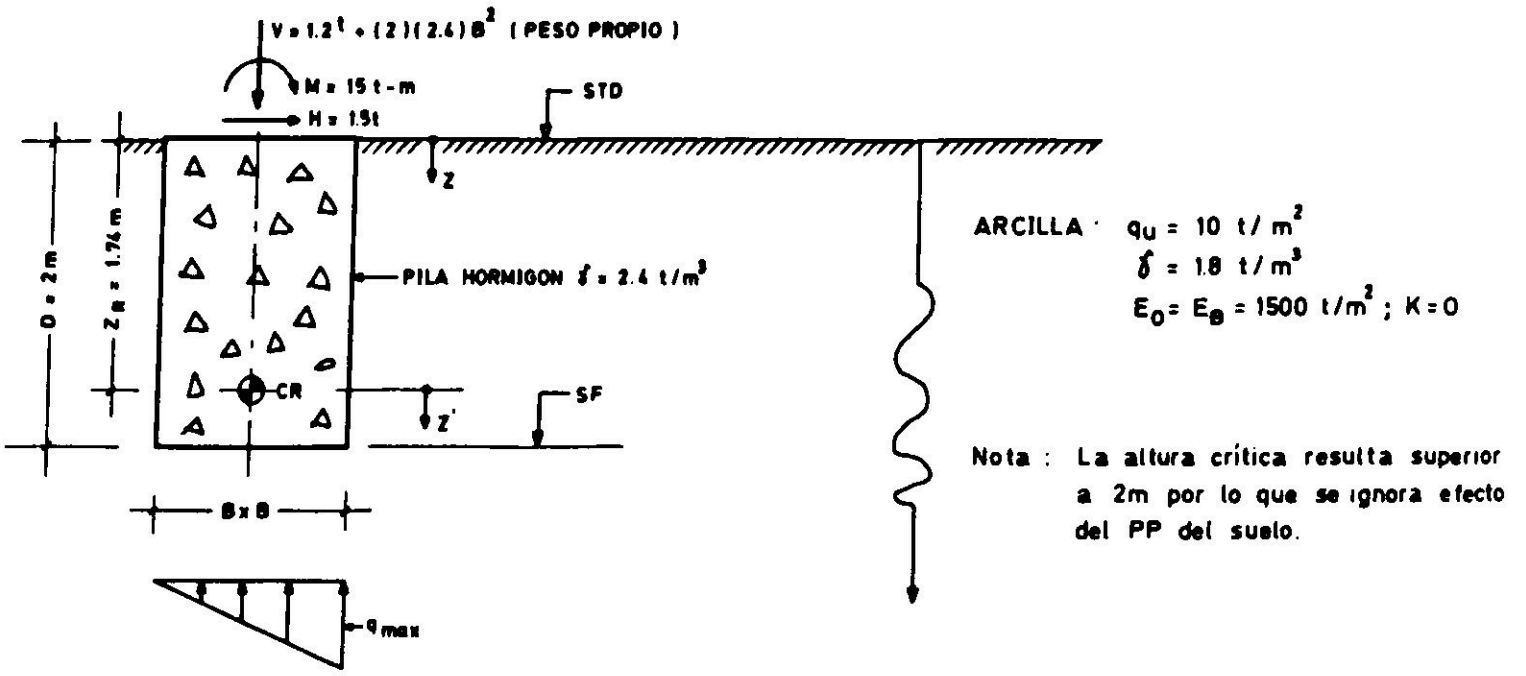
The soil structure interaction in rigid foundations is analyzed. The foundation is subjected to vertical, horizontal and overturning forces applied at the ground level and both lateral and foundation level soil restrain are included in the problem. Soil stress-strain characteristics are assumed to be those of an elastic medium. Simplified equations to compute interaction pressures and foundation displacements are obtained as a function of the soil deformation characteristics and foundation geometry.

ANEXO

CASO (1):

Pila en arcilla sin tracciones en sello fundación

Se trata de determinar el lado B de la pila de hormigón de modo que no se produzcan tracciones a nivel de sello de fundación.



Por condición de diseño deberá verificarse $B/6 = M_\theta / V$. Después de algunos tanteos la verificación se logra con $B = 1.85$ m obteniéndose $\lambda = 2/1.85 = 1.08$; con $\lambda = 1.08$ y $\beta = 1$ se obtiene $I_\theta = 0.52$; utilizando la ec. (20) se tiene:

$$\theta = \frac{15 + (0.87)(2.0)(1.5)}{(1500)(1.85^3)(0.52)} = 3.6 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_\theta = (0.157)(1.85^3)(1500)(3.6 \times 10^{-3}) = 5.37 \text{ t} \cdot \text{m} \qquad \text{ec. 5}$$

$$q = \frac{1.2 + (1.85^2)(2)(2.4)}{1.85^2} \pm \frac{5.37}{(1/6)1.85^3} = 5.1 \pm 5.1 \qquad \textbf{No hay tracción}$$

$$q_{máx} = 10.2 \text{ t/m}^2 \approx q_u \qquad \textbf{O.K.}$$

$$T_\Delta = (0.604)(1500)(1.85)(3.6 \times 10^{-3})(0.26) = 1.57 \text{ t} \qquad \text{ec. 8}$$

$$T_\Delta / B^2 = 1.57/1.85^2 = 0.46 \text{ t/m}^2 \ll q_u/2 \qquad \textbf{No hay deslizamiento}$$

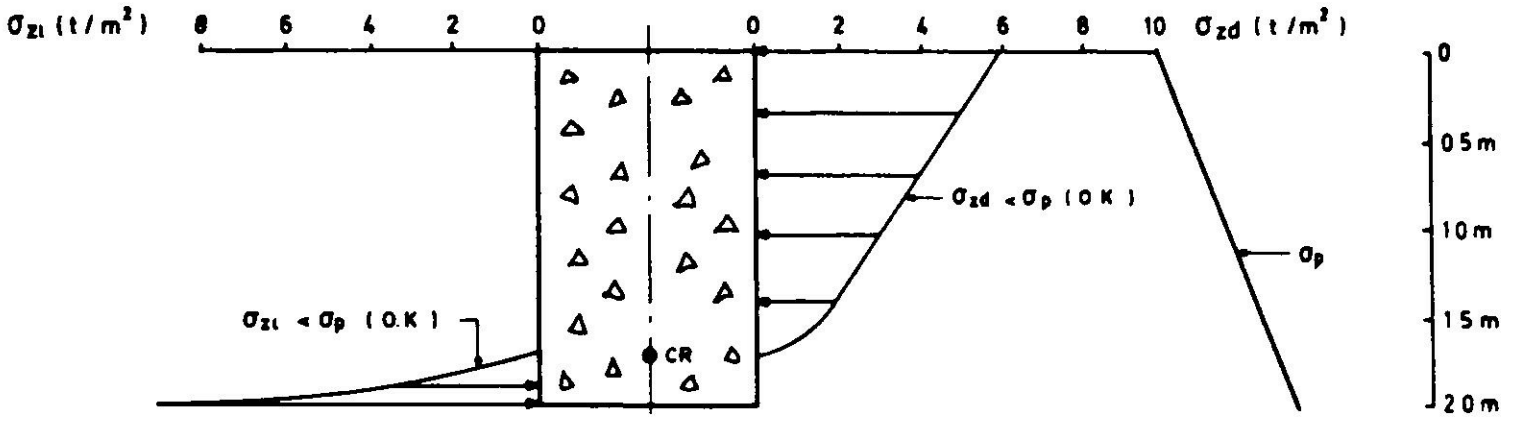
Las fatigas laterales quedan expresadas por:

$$\sigma_{zd} = \frac{(1500)(3.6 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} = 5.9\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \qquad \text{con } u = Z/Z_R \qquad \text{ec. 9}$$

$$\sigma_{zi} = \frac{(1500)(3.6 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2}\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}} = 5.9\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}} \qquad \text{con } u' = \frac{Z'}{D - Z_R} \qquad \text{ec. 12}$$

La resistencia pasiva queda expresada por:

$$\sigma_p = \gamma Z + q_u = 10 + 1.8Z \quad \text{en} \quad (\text{t/m}^2) \quad \text{si} \quad Z \text{ en (m)}.$$



Si no se considera la restricción del suelo embebedor (pila rodeada por aire) habría que aumentar su sección a 2.8 x 2.8 m:

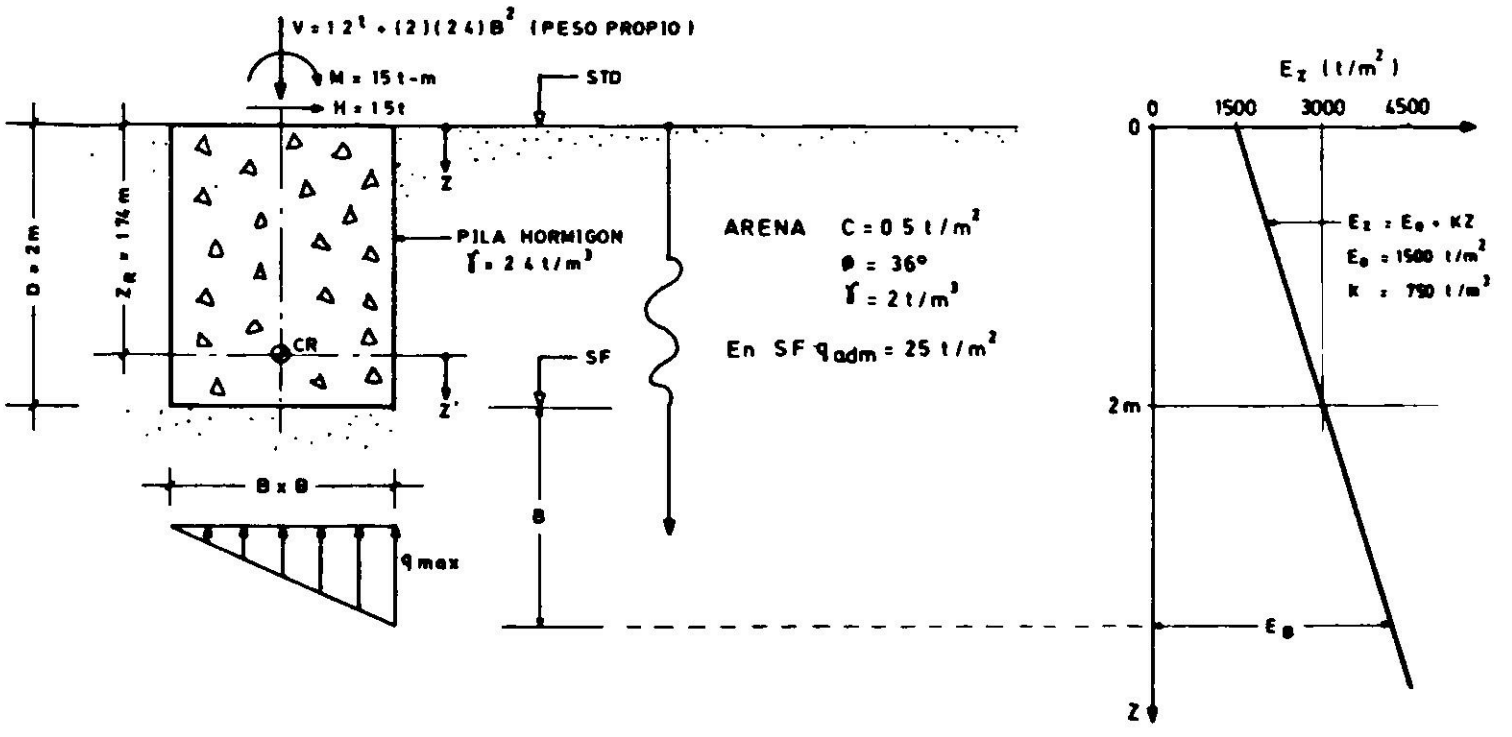
$$q = \frac{1.2 + (2.8^2)(2)(2.4)}{2.8^2} \pm \frac{15 + (1.5)(2)}{(1/6).2.8^3} = 4.95 \pm 4.95 \text{ t/m}^2$$ **No hay tracción**

$q_{máx} \approx 10$ t/m^2 $= q_u$ **(O.K.)**; $T_\Delta / B^2 = 1.5/2.8^2 = 0.19$ t/m$^2 \ll q_u/2$ **(O.K.)**. De la ec. (5) con $M_\theta = 15 + (1.5)(2) = 18$ t-m se despeja $\theta = 18/[(0.157)(2.8)^3(1500)] = 3.5 \times 10^{-3}$ rad.

CASO (2):

Pila en arena sin tracciones en sello fundación

Se trata de determinar el lado B de la pila de hormigón de modo que no se produzcan tracciones a nivel de sello de fundación.



La altura crítica resulta igual a 1.0 m con lo cual habría que considerar el efecto del peso propio del suelo. Sin embargo, su influencia sería sólo sobre el último metro de la pila, por lo que se desprecia (consideración en todo caso conservadora). La variación lineal de E_z entre STD y SF se asimila a un módulo de deformación equivalente E^0

$$E^0 = 1500 + (750)(2)\frac{0.068 + 0.014}{0.295 + 0.015} \approx 1900 \text{ t/m}^2$$ éc. 20b

El módulo de deformación bajo la base de la pila, E_B, se considera igual al valor de E_z para $Z = D + B$.

La condición de diseño $B/6 = M_\theta / V$ se satisface para $B = 2.4$ m obteniéndose $E_B = 4800$ t/m^2; $\beta = 4800/1900 = 2.53$; $\lambda = 2/2.4 = 0.83$; en la Fig. 5 con $\beta = 2.53$ y $\lambda = 0.83$ se obtiene $I_\theta = 0.60$; utilizando la ec. 20 se tiene:

$$\theta = \frac{15 + (0.87)(2)(1.5)}{(1900)(2.4^3)(0.60)} = 1.1 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_\theta = (0.157)(2.4^3)(4800)(1.1 \times 10^{-3}) = 11.6 \text{ t·m} \qquad \text{ec. 5}$$

$$q = \frac{1.2 + (2.4^2)(2)(2.4)}{2.4^2} \pm \frac{11.6}{(1/6)\,2.4^3} = 5 \pm 5 \qquad \textbf{No hay tracción}$$

$$q_{máx} = 10 \text{ t/m}^2 < q_{adm} \qquad \textbf{O.K.}$$

$$T_\Delta = (0.604)(4800)(2.4)(1.1 \times 10^{-3})(0.26) = 2 \text{ t} \qquad \text{ec. 8}$$

Suponiendo adherencia nula y un ángulo de roce $\delta = 30^\circ$ a nivel SF:

$$T_\Delta = 2 \text{ t} \ll (1.2 + 2.4^2 \times 2 \times 2.4) \text{ tg } 30^\circ = 16.6 \text{ t} \qquad \textbf{O.K.}$$

Las fatigas laterales quedan expresadas por:

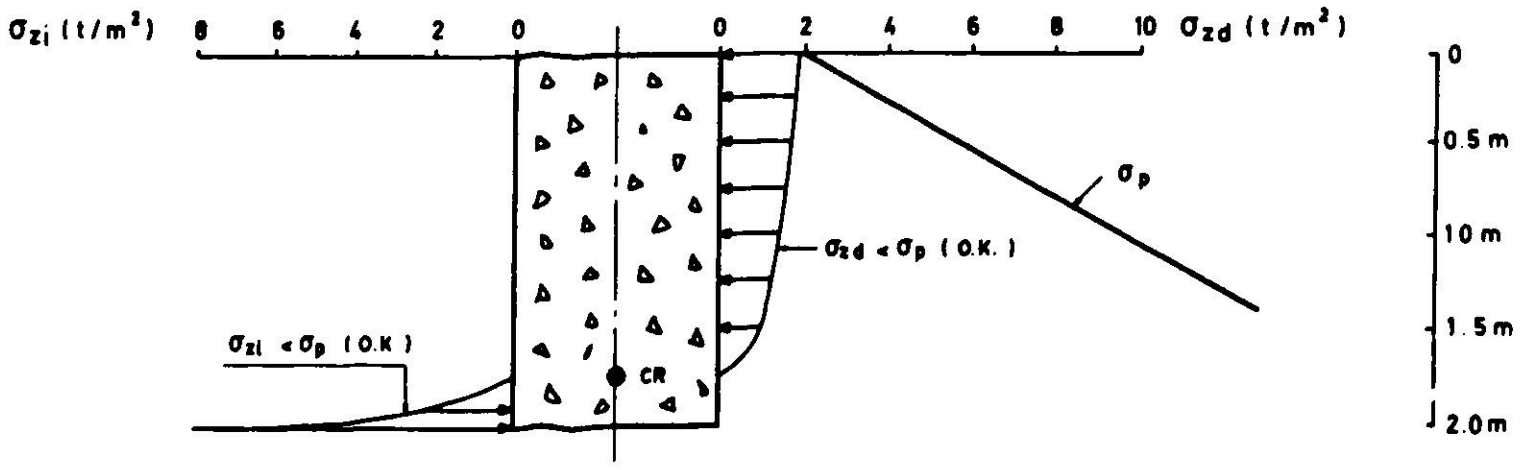
$$\sigma_{zd} = \frac{(1500)(1.1 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} + \frac{(750)(1.74)(1.1 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2}\, u \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \quad \text{con } u = \frac{Z}{Z_R} \qquad \text{ec. 9}$$

$$E_{izq} = 1500 + (0.935)(750)(2). = 2900 \text{ t/m}^2 \qquad \text{ec. 12d}$$

$$\sigma_{zi} = \frac{(2900)(1.1 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2} \frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}} \quad \text{con } u' = \frac{Z'}{D - Z_R} \qquad \text{ec. 12}$$

La resistencia pasiva queda expresada por:

$$\sigma_p = \gamma Z \frac{1 + \operatorname{sen}\phi}{1 - \operatorname{sen}\phi} + 2C \qquad \frac{1 + \operatorname{sen}\phi}{1 - \operatorname{sen}\phi} = 1.96 + 7.7\,Z \quad \text{en (t/m}^2\text{)} \quad \text{si } Z \text{ en (m)}$$



Si no se considerara la restricción del suelo embebedor habría que aumentar la sección de la pila a 2.8 x 2.8 m.

$q = 4.95 \pm 4.95$ t/m^2 **No hay tracción**; Ver Caso (1)

$q_{máx} \approx 10 t/m^2 < q_{adm}$ O.K. $T_\Delta = 1.5\ t \ll (1.2 + 2.8^2 \times 2 \times 2.4)\ tg\ 30^o$

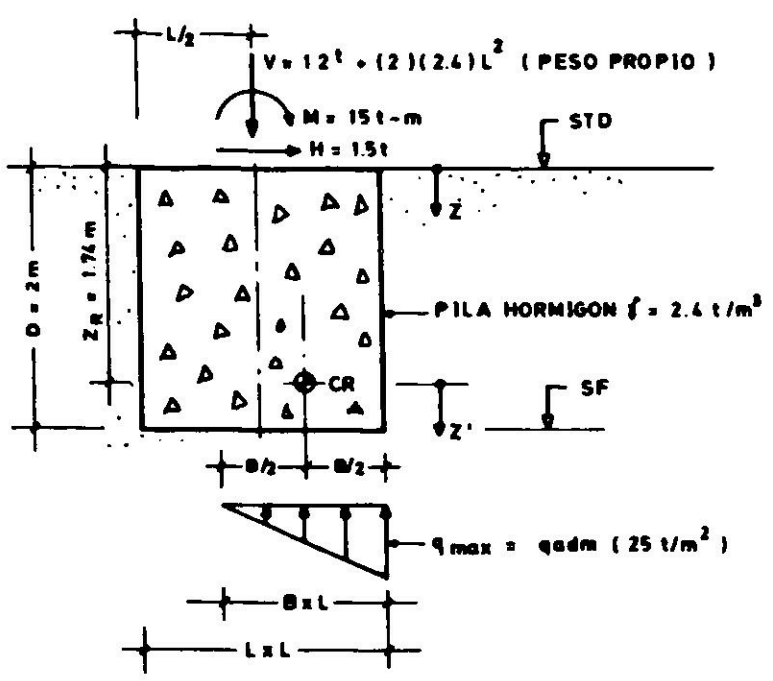
De la ec. 5 con $M_\theta = 15 + (1.5)(2) = 18$ t.m se despeja $\theta = 18 / [(0.157)(2.8)^3 (1500 + 750 \times 4.8)] =$

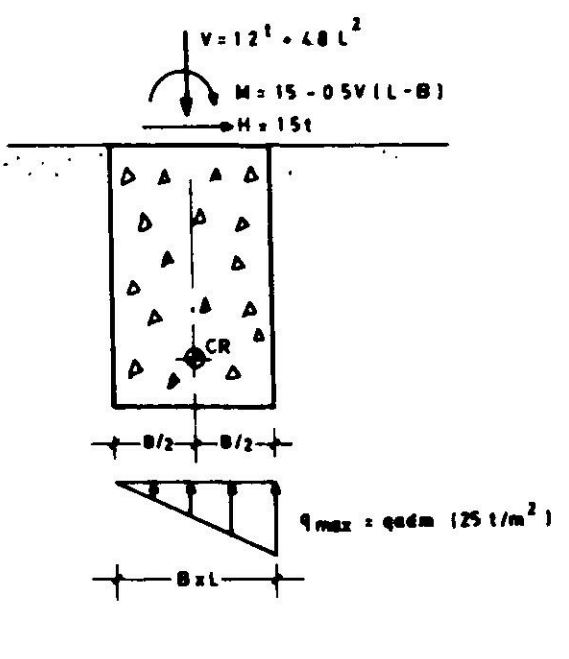
$= 1 \times 10^{-3}$ rad.

CASO (2a) :

Pila en arena con $q_{máx} = q_{adm}$ en sello de fundación

Se trata de determinar la sección de la pila embebida en la arena cuyas características se expusieron en el Caso 2 , para la condición de diseño $q_{máx} = q_{adm}$.





Para efectos de cálculo la pila real se transforma en la pila ficticia modificándose la solicitación del momento M aplicado en la cabeza. La pila ficticia tiene una sección $B \times L$ en que B representa el ancho en compresión en la pila real. De acuerdo a lo anterior deberá verificarse:

$$B/6 = M_\theta / V$$

$M_\theta = 0.157 E_B\ L\ B^2\ \theta$ y $\theta = (M + 0.87\ DH) / (E^0 L B^2 I_\theta)$; reemplazando θ se tiene :

$M_\theta = 0.157\ \beta\ (M + 0.87\ DH)/(I_\theta) = 0.157\ \beta\ [15 - 0.5\ V\ (L - B) + 2.61] / (I_\theta)$; por consiguiente deberá verificarse:

$$\frac{B}{6} = 0.157\ \beta\ \frac{15 - 0.5V(L - B) + 2.61}{I_\theta\ V} \qquad \text{con } V = 1.2 + 4.8\ L^2,\ \beta = E_B / E^0$$

Además deberá verificarse que: $\dfrac{V}{B\ L} + \dfrac{6 M_\theta}{L\ B^2} = 25\ t/m^2$

Después de algunos tanteos las dos últimas ecuaciones se satisfacen para $L = 1.3$ m y $B = 0.6$ m; en efecto para $B = 0.6$ se obtiene $E_B = 1500 + (750)(2.6) = 3450\ t/m^2$; considerando que $E^0 = 1900\ t/m^2$ (ver Caso (2)) se obtiene $\beta = 3450/1900 = 1.82$; con $\beta = 1.82$

y $\lambda = 2/0.6 = 3.33$ se entra a la Fig. 5 obteniéndose $I_\theta = 3.9$. Reemplazando en la primera de las ecuaciones se tiene:

$$\frac{0.6}{6} = 0.10 \approx (0.157)(1.82)\,\frac{15 - (0.5)(9.3)(1.3 - 0.6) + 2.61}{(3.9)(9.3)} = 0.11$$

Para la segunda ecuación se tiene:

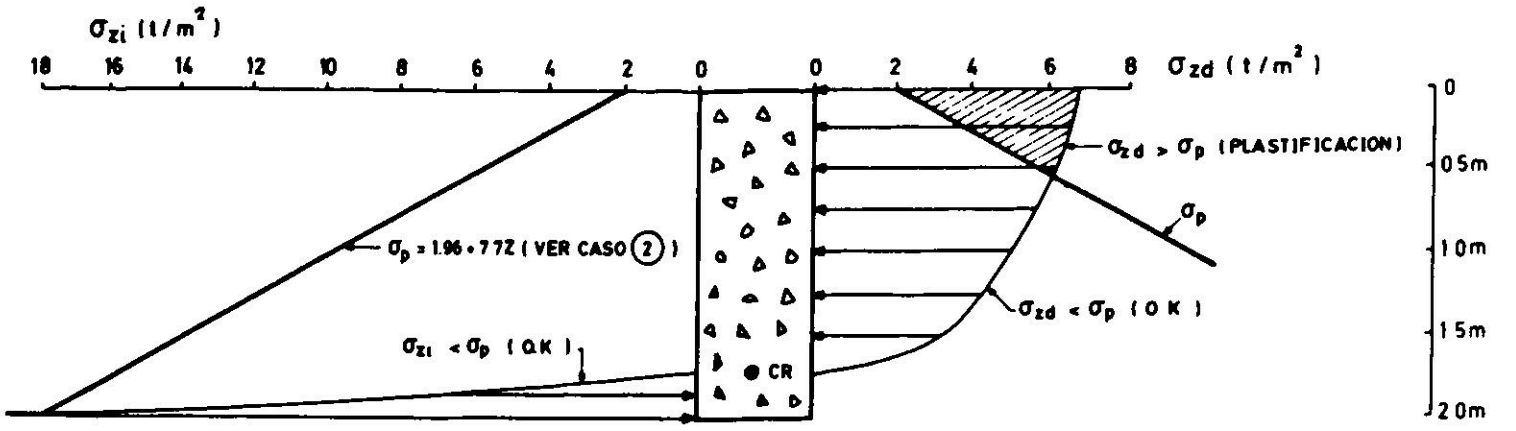
$$\frac{9.3}{(0.6)(1.3)} + \frac{(6)(1.02)}{(1.3)(0.6)^2} \approx 12 + 13 = 25\ t/m^2 \qquad \text{O.K.}$$

El ángulo $$\theta = \frac{1.02}{(0.157)(3450)(1.3)(0.6)^2} \approx 4.1 \times 10^{-3}\ \text{rad} \qquad \text{ec. 5}$$

Las fatigas laterales quedan expresadas por:

$$\sigma_{zd} = \frac{(1500)(4.1 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} + \frac{(750)(1.74)(4.1 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2}\,u\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$$

Como $E_{izq} = 2900\ t/m^2$ (Ver Caso (2)) se tiene: $\sigma_{zi} = \dfrac{(2900)(4.1 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2}\,\dfrac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}$



$$T_\Delta = (0.604)(3450)(1.3)(4.1 \times 10^{-3})(0.26) = 2.9\ t < V\ \text{tg}\ 30^\circ = 9.3\ \text{tg}\ 30^\circ = 5.4\ t \quad \text{O.K.}$$

Si no se considera la restricción del suelo embebedor las condiciones de diseño quedan representadas por las relaciones siguientes:

$$\frac{B}{6} = \frac{M_\theta}{V} \qquad \text{con} \qquad \begin{aligned} M_\theta &= 15 - 0.5\,V(L - B) + HD \\ V &= 1.2 + 4.8\,L^2 \end{aligned}$$

$$\frac{V}{B\,L} + \frac{6M_\theta}{L\,B^2} = 25\ t/m^2$$

Estas ecuaciones se satisfacen aproximadamente para $L = 2.15$ m y $B = 0.8$ m

$$T_\Delta = 1.5\ t \ll (1.2 + 4.8 \times 2.15^2)\ \text{tg}\ 30^\circ = 13.5\ t \qquad \text{O.K.}$$

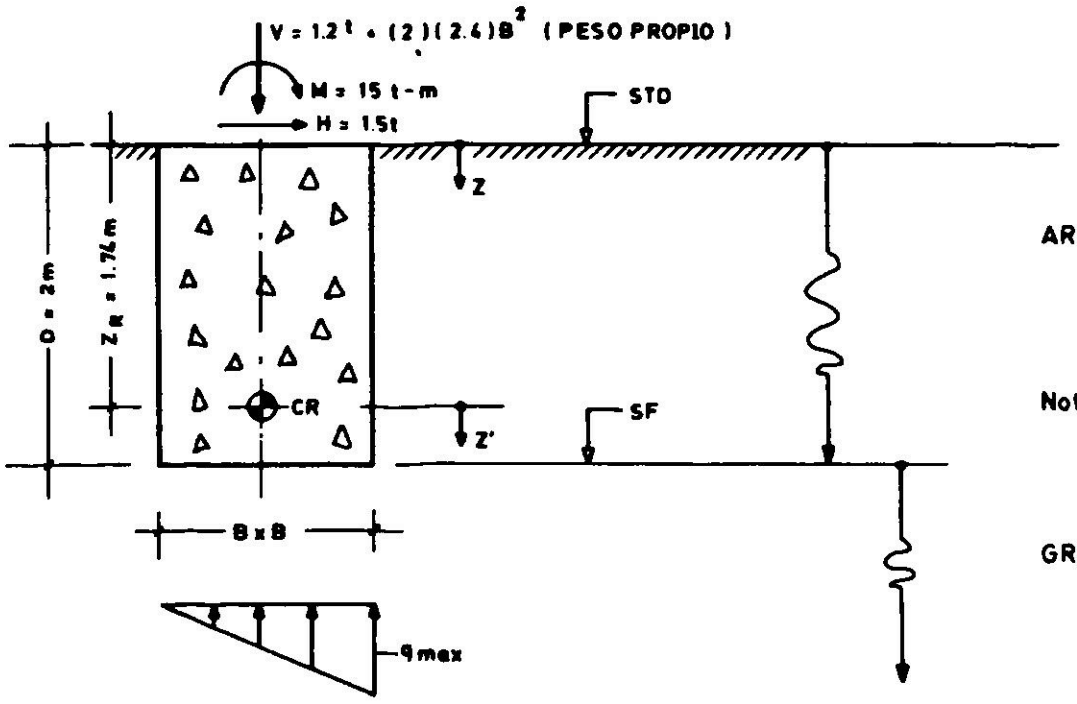
$$\theta = \frac{15 - 0.5 \times V(2.15 - 0.8) + (1.5)(2)}{(0.157)(2.15)(0.8)^2\ (1500 + 750 \times 2.8)} \approx 3 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$(FS)\ \text{Volcamiento} = \frac{(0.5)(2.15)\ V}{15 + 1.5 \times 2} = 1.4 \qquad \textbf{O.K.}$$

CASO (3) :

Pila en suelo estratificado sin tracción en sello fundación

Se trata de determinar el lado B de la pila de hormigón de modo que no se produzcan tracciones a nivel de sello de fundación.



La condición de diseño $B/6 = M_\theta / V$ se logra para $B = 2.55$ m obteniéndose $\lambda = 2/2.55 = 0.78$; en la Fig. 5 con $\lambda = 0.78$ y $\beta = (10.000)/(1500) = 6.7$ se obtiene $I_\theta = 1.30$; utilizando la ec. (20) se tiene:

$$\theta = \frac{15 + (0.87)(2.0)(1.5)}{(1500)(2.55^3)(1.30)} = 5.4 \times 10^{-4}\ \text{rad}$$

$$M_\theta = (0.157)(2.55^3)(10.000)(5.4 \times 10^{-4}) = 14.1\ \text{t·m} \qquad \text{ec. 5}$$

$$q = \frac{1.2 + (2.55^2)(2)(2.4)}{2.55^2} \pm \frac{14.1}{(1/6)\ 2.55^3} = 5.0 \pm 5.0 \qquad \textbf{No hay tracción}$$

$$q_{máx} = 10\ \text{t/m}^2 < q_{adm} \qquad \textbf{O.K.}$$

$$I_\Delta = (0.604)(10.000)(2.55)(5.4 \times 10^{-4})(0.26) = 2.16\ \text{t} \qquad \text{ec. 8}$$

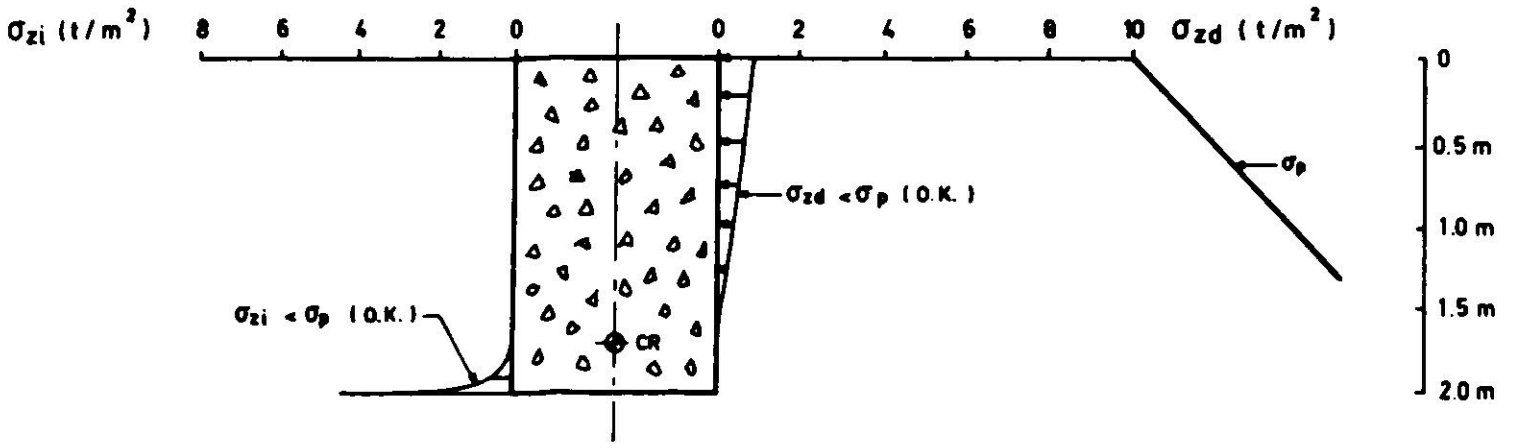
Suponiendo adherencia nula y un ángulo de roce $\delta = 35^\circ$ a nivel SF·

$$T_\Delta = 2.16\ \text{t} \rightarrow \ll (1.2 + 2.55^2 \times 2 \times 2.4)\ \text{tg}\ 35^\circ = 22.7\ \text{t} \qquad \textbf{O.K.}$$

$$\sigma_{zd} = \frac{(1500)(5.4 \times 10^{-4})}{1 - 0.3^2} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} = 0.89 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \quad \text{con} \quad u = Z/Z_R\,, \qquad \text{ec. 9}$$

$$\sigma_{zi} = \frac{(1500)(5.4 \times 10^{-4})}{1 - 0.3^2} \frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}} = 0.89 \frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}} \quad \text{con} \quad u' = \frac{Z'}{D - Z_R} \qquad \text{ec. 12}$$

$$\sigma_p = \gamma Z + q_u = 10 + 1.8\,Z \text{ en t/m}^2 \text{ si } Z \text{ en (m)}$$



Si no se considera la restricción del suelo embebedor habría que aumentar la sección de la pila a 2.8 x 2.8 m:

$q = 4.95 \pm 4.95$ t/m² **No hay tracción;** Ver Caso (1)

$q_{máx} \approx 10$ t/m² $< q_{adm}$ $\qquad T_\Delta = 1.5$ t $\ll (1.2 + 2.8^2 \times 2 \times 2.4)$ tg 35^o

De la ec. 5 con $M_\theta = 15 + 1.5 \times 2 = 18$ t·m se despeja $\theta = \dfrac{18}{(0.157)(2.8)^3(10.000)} = 5.2 \times 10^{-4}$ rad

CASO (3a) :

Pila en suelo estratificado con $q_{máx} = q_{adm}$ en sello de fundación

Se trata de determinar la sección de la pila embebida en el suelo cuyas características se expusieron en el Caso (3), para la condición de diseño $q_{máx} = q_{adm}$.

Las ecuaciones que deben verificarse son idénticas a las formuladas para el Caso (2a), salvo que ahora $\beta = (10.000)/(1500) = 6.7$ (valor constante independiente de B).

De acuerdo a lo anterior las ecuaciones serían:

$$\frac{B}{6} = 0.157\,\beta \frac{15 - 0.5\,V(L - B) + 2.61}{I_\theta\,V} \qquad \text{con } V = 1.2 + 4.8\,L^2, \quad \beta = 6.7$$

$$\frac{V}{BL} + \frac{6M_\theta}{LB^2} = 50 \text{ t/m}^2$$

Después de algunos tanteos se encuentra $L = 1.6$ m y $B = 0.38$ m como valores que satisfacen las ecuaciones anteriores. En efecto, para $\lambda = 2/0.38 = 5.3$ y $\beta = 6.7$ se obtiene $I_\theta = 11.5$; Reemplazando en la primera de las ecuaciones se tiene:

$$\frac{0.38}{6} = 0.063 \approx (0.157)(6.7)\frac{15 - (0.5)(13.5)(1.6 - 0.38) + 2.61}{(11.5)(13.5)} = 0.064$$

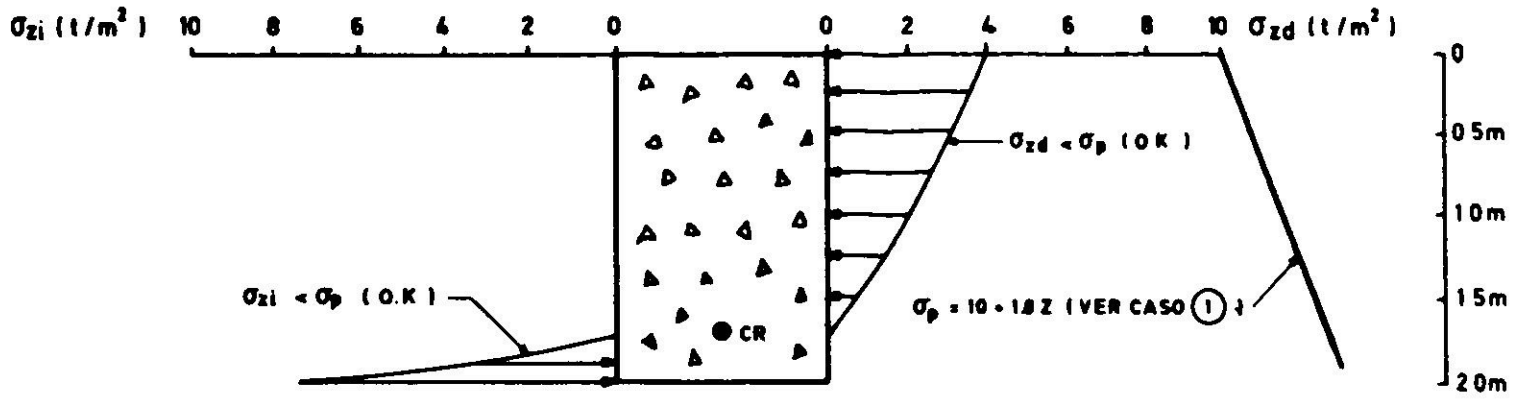
Para la segunda ecuación se tiene:

$$\frac{13.5}{(1.6)(0.38)} + \frac{(6)(0.86)}{(1.6)(0.38)^2} = 23 + 22 = 45 \text{ t/m}^2 \qquad \text{O.K.}$$

El ángulo $$\theta = \frac{0.86}{(0.157)(10.000)(1.6)(0.38)^2} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Las fatigas laterales quedan expresadas por:

$$\sigma_{zd} = \frac{(1500)(2.4 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2}\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}; \qquad \sigma_{zi} = \frac{(1500)(2.4 \times 10^{-3})}{1 - 0.3^2}\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}$$



$$T_\Delta = (0.604)(10.000)(1.6)(2.4 \times 10^{-3})(0.26) = 6 \text{ t} < V \text{ tg } 35^\circ \approx 9.5 \text{ t} \qquad \text{O.K.}$$

Si no se considerara la restricción del suelo embebedor las condiciones de diseño quedan representadas por las relaciones siguientes:

$$\frac{B}{6} = \frac{M_\theta}{V} \qquad \text{con } M_\theta = 15 - 0.5\,V(L - B) + HD$$
$$V = 1.2 + 4.8\,L^2$$

$$\frac{V}{BL} + \frac{6M}{LB^2} = 50 \text{ t/m}^2$$

Estas ecuaciones se satisfacen aproximadamente para $L = 2$ m y $B = 0.35$ m

$$T_{\Delta} = 1.5 \text{ t} \ll (1.2 + 4.8 \times 2^2) \text{ tg } 35^{\circ} \approx 14 \text{ t}$$

$$\theta = \frac{15 - 0.5\,V\,(2 - 0.35) + (1.5)(2)}{(0.157)(2.0)(0.35)^2\,(10.000)} = 3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$(\text{FS}) \text{ Volcamiento} = \frac{(0.5)(2)\,V}{15 + 1.5 \times 2} = 1.13$$

Valor bajo