Las probabilidades y sus aplicaciones a la estadística

Prof. Domingo Almendras

(continuación)

MOMENTOS EN EL CASO DE BERNOUILLI:

A) Momento de primer orden.—Hemos visto en el párrafo anterior que

$$m_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i P_i = \sum_{i=0}^{n} x_i C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{x=0}^{n} x \; C_n^x p^x q^{n-x}$$

Vemos que $x \, C_n^x$ se puede poner en la forma: $n C_{n-1}^{x-1}$

y reemplazando en la anterior, tenemos: $\sum\limits_{x=0}^{n} x \, C_n^x p^x q^{n-x} = np \sum\limits_{x=1}^{n} C_{n-1}^{x-1} p^{x-1} q^{n-x}$

$$= np \, (q + p)^{n-1}$$

O sea, $\bar{x} = np$

B) Momento de segundo orden.—Por definición tenemos:

$$m_2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 \; P_x = \sum_{x=0}^{n} x^2 \; C_n^x \; p^x \; q^{n-x}$$

El segundo miembro podemos descomponerlo en la forma siguiente:

$$\sum_{x=0}^{n} x^2 C_n^x p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x \, (x-1) \; C_n^x p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \, C_n^x \; p^x q^{n-x}$$

y puesto que $x(x-1) \; C_n^x = n \; (n-1) \; C_{n-2}^{x-2}$ y para $x = 0$ ó 1 el segundo miembro de la relación anterior da dos términos nulos, tenemos:

$$\sum_{x=0}^{n} x^2 C_n^x p^x q^{n-x} = n(n-1)p^2 \Sigma C_{n-2}^{x-2} p^{x-2} q^{n-x} + n p$$

$$= n(n-1)p^2 (q+p)^{n-2} + n p$$

$$m_2 = n(n-1)p^2 + n p = n p q + n^2 p^2$$

El momento μ_2 se designa con el nombre de variancia x y la calcularemos mediante la relación:

$$\mu_2 = m_2 - \bar{x}^2$$

Reemplazando $\bar{x} = n p$, tenemos:

$$\mu_2 = \text{Var. } x = n p q$$

MOMENTOS EN EL CASO DE POISSON:

A) *Momento de primer orden.*—Para el cálculo de los momentos en el caso de Poisson, debemos recordar la fórmula conocida en el análisis combinatorio $\sum_{x=0}^{r} C_b^{r-x} C_a^x = C_{a+b}^r$ y, además, $x\, C_a^x = a\, C_{a-1}^{x-1}$.

$$\text{Luego: } \sum_{x=0}^{n} x\, P_x = \frac{\sum_{x=0}^{n} x\, C_a^x C_b^{n-x}}{C_{a+b}^n} = \frac{a\, \Sigma\, C_{a-1}^{x-1} C_b^{n-x}}{C_{a+b}^n} = \frac{a\, C_{a+b-1}^{n-1}}{C_{a+b}^n}$$

$$(4) \quad \bar{x} = \frac{a\, C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \frac{a\, n}{N} = n p$$

B) *Momento de segundo orden.*—Podemos partir de la identidad:

$$m_2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 P_x = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) P_x + \sum_{x=0}^{n} x\, P_x$$

$$m_2 = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) P_x + n p$$

$$\text{y } x(x-1) P_x = \frac{x(x-1)\, C_a^x C_b^{n-x}}{C_N^n} = \frac{a(a-1)}{C_N^n} C_{a-2}^{x-2} C_b^{n-x}$$

$$\text{Luego: } \quad m_2 = \frac{a(a-1)}{C_N^n} \Sigma\, C_{a-2}^{x-2} C_b^{n-x} + n p$$

$$m_2 = \frac{a(a-1)}{C_N^n} C_{N-2}^{n-2} + n p$$

Después de algunas reducciones, obtenemos:

$$(5) \quad m_2 = \frac{n\,(N-n)\,p\,q}{N-1} + n^2\,p^2$$

La variancia μ_2 se obtiene de la relación ya utilizada $\mu_2 = m_2 - \bar{x}^2$ y reemplazando m_2 y $\bar{x}$, tenemos:

$$\text{Var. } x = \frac{n\,(N-n)\,p\,q}{N-1}$$

Las aplicaciones de la variancia, las veremos en un próximo artículo.